Занятие 2. Сложная индукция.

Задачи, помеченные символом "Д." — только для группы "Догоняющие", группе "Убегающие" просьба: не тратить на них время непосредственно на кружке. Задачи без символа — общие. Задачи с символом "У." — для группы "Убегающие", группа "Догоняющие" может их решать и обсуждать, но после других сданных задач. "У!" — уберсложные задачи.

1. **Аксиома индукции:**Если известно, что некоторое утверждение верно для 1, и из предположения, что утверждение верно для некоторого n, вытекает его справедливость для n+1, то это утверждение верно для всех натуральных чисел. Докажите, что аксиома индукции равносильна любому из следующих утверждений:
   (a) всякое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьшее число;
   (b) всякое конечное непустое подмножество натуральных чисел содержит наибольшее число;
   (c) если некоторое множество натуральных чисел содержит 1 и вместе с каждым натуральным числом содержит следующее за ним, то оно содержит все натуральные числа;
   (d) если известно, что некоторое утверждение верно для некоторого a, и из предположения, что утверждение верно для всех натуральных чисел k, таких, что $a \leqslant k < n$ вытекает его справедливость для n, то это утверждение верно для всех натуральных чисел $k \geqslant a$;
   (e) **(Обратная индукция.)** Если известно, что некоторое утверждение верно для 1 и 2, и из предположения, что утверждение верно для некоторого $n > 1$, вытекает его справедливость для 2n и n - 1, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

2. *Задача для разбора*: Доказать, что при любом натуральном $n \geq 1$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

3. **Д.** На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.

4. Доказать, что сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ является точным квадратом.

5. **У.** Доказать, что (при любом натуральном $n > 1$)
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$$

6. **У.** Доказать, что $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

7. **Д.** n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\dfrac{1}{n}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

8. **У!** Имеется много кубиков одинакового размера, раскрашенных в шесть цветов. При этом каждый кубик раскрашен во все шесть цветов, каждая грань — в какой-нибудь один свой цвет, но расположение цветов на разных кубиках может быть различным. Кубики выложены на стол, так что получился прямоугольник. Разрешается взять любой столбец этого прямоугольника, повернуть его вокруг длинной оси и положить на место. То же самое разрешается делать и со строками. Всегда ли можно с помощью таких операций добиться того, что все кубики будут смотреть вверх гранями одного и того же цвета?

9. На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1, a_2, a_3$, ... по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n{}^{\smile}2$, если число $a_n - 2$ — натуральное и еще не выписано на доску, в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появятся в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу.

Занятие 2. Сложная индукция.

Задачи, помеченные символом "Д." — только для группы "Догоняющие", группе "Убегающие" просьба: не тратить на них время непосредственно на кружке. Задачи без символа — общие. Задачи с символом "У." — для группы "Убегающие", группа "Догоняющие" может их решать и обсуждать, но после других сданных задач. "У!" — уберсложные задачи.

1. **Аксиома индукции:**Если известно, что некоторое утверждение верно для 1, и из предположения, что утверждение верно для некоторого n, вытекает его справедливость для n+1, то это утверждение верно для всех натуральных чисел. Докажите, что аксиома индукции равносильна любому из следующих утверждений:
   (a) всякое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьшее число;
   (b) всякое конечное непустое подмножество натуральных чисел содержит наибольшее число;
   (c) если некоторое множество натуральных чисел содержит 1 и вместе с каждым натуральным числом содержит следующее за ним, то оно содержит все натуральные числа;
   (d) если известно, что некоторое утверждение верно для некоторого a, и из предположения, что утверждение верно для всех натуральных чисел k, таких, что $a \leqslant k < n$ вытекает его справедливость для n, то это утверждение верно для всех натуральных чисел $k \geqslant a$;
   (e) **(Обратная индукция.)** Если известно, что некоторое утверждение верно для 1 и 2, и из предположения, что утверждение верно для некоторого $n > 1$, вытекает его справедливость для 2n и n - 1, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

2. *Задача для разбора*: Доказать, что при любом натуральном $n \geq 1$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

3. **Д.** На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.

4. Доказать, что сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ является точным квадратом.

5. **У.** Доказать, что (при любом натуральном $n > 1$)
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$$

6. **У.** Доказать, что $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

7. **Д.** n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\dfrac{1}{n}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

8. **У!** Имеется много кубиков одинакового размера, раскрашенных в шесть цветов. При этом каждый кубик раскрашен во все шесть цветов, каждая грань — в какой-нибудь один свой цвет, но расположение цветов на разных кубиках может быть различным. Кубики выложены на стол, так что получился прямоугольник. Разрешается взять любой столбец этого прямоугольника, повернуть его вокруг длинной оси и положить на место. То же самое разрешается делать и со строками. Всегда ли можно с помощью таких операций добиться того, что все кубики будут смотреть вверх гранями одного и того же цвета?

9. На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1, a_2, a_3$, ... по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n{}^{\smile}2$, если число $a_n - 2$ — натуральное и еще не выписано на доску, в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появятся в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу.