ЗАНЯТИЕ 3. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Теорема (о делении с остатком). *Для любых целых чисел a и b ($b>0$) существует единственная пара целых чисел q и r ($0 \le r < b$), таких что $a = b \cdot q + r$. При этом q называется* ***неполным частным****, r –* ***остатком*** *от деления a на b.*

Пример 1: На доске было написано некоторое трехзначное число n. «Оно кратно 2», – сказал Петя и увеличил число на 1. «Теперь оно кратно 3», – и снова увеличил на 1. «А теперь кратно 4», – снова увеличил на 1. «Ой! Теперь кратно 5». Какое наименьшее число могло быть записано на доске?

Решение: Заметим, что если при прибавлении 1, число стало делится на 3 нацело, то это число изначально делилось на 3 с остатком 2. При прибавлении 2, число стало делиться нацело на 4, а при прибавлении 3 – на 5. Значит, изначальное число делилось на 4 и 5 также с остатком 2. Вычтем из числа на доске 2. Теперь полученное число будет делиться нацело на 3, 4 и 5, а значит, и на их наименьшее общее кратное – 60. Таким образом, наименьшее трехзначное число, которое нам подходит, будет равно $60 \cdot 2 + 2 = 122$.

Ответ: 122.

Пример 2: Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 3 – остаток 2. Найдите остаток от деления числа a на 15.

Решение: Рассмотрим отдельно два условия и вспомним предыдущее занятие про остатки.

При делении на 5 остаток равен 1. Значит, при упаковке «яблок» по 5 в «пакет», останется одно лишнее «яблоко». Найдем остаток при делении на 15. Заметим, что три «пакета» дают 15 яблок. Будем паковать по 3 «пакета» в один «ящик». Могло получиться, что все «пакеты» объединились в тройки, тогда вне «ящиков» осталось одно лишнее «яблоко». Могло остаться одно «яблоко» и один лишний «пакет», тогда вне «ящиков» всего 6 лишних «яблок». Могло остаться лишнее «яблоко» и два лишних «пакета», тогда вне «ящиков» всего 11 лишних «яблок». Получаем, что при делении нашего числа на 15 нельзя получить других остатков, кроме 1, 6 или 11.

Аналогично рассмотрим второе условие. При делении на 3 остаток равен 2. Проведем те же рассуждения про «пакеты» и «яблоки». Только теперь группируем «ящики» по 5 «пакетов». Получаем, что остаток при делении на 15 может быть равен 2, 5, 8, 11 или 14.

Поскольку оба условия должны выполняются одновременно, остаток может быть равен только 11.

Ответ: 11.

ЗАДАНИЕ

1. Что можно сказать об остатке от деления на 8 чисел: **а)** $24k+3$; **б)** $16n-3$; **в)** $32m+15$?

2. Найдите контрпример, опровергающий утверждение (примером является число плюс доказательство того, что оно, действительно, опровергает утверждение).

а) нет четных чисел, делящихся на 7 с остатком 4.

б) нет чисел, которые и на 5, и на 7 делятся с остатком 2.

в) нет чисел, которые делятся на 5 с остатком 3, а на 3 с остатком 1.

3. Верны ли следующие утверждения и почему?

а) найдется число a, кратное 3 и дающее при делении на 12 остаток 2.

б) если число при делении на 8 дает остаток 3, то при делении на 4 оно также дает остаток 3.

в) если число при делении на 4 дает остаток 3, то при делении на 8 остаток сохраняется.

г) если число при делении на 15 дает остаток 7, то при делении на 5 остаток не равен 2.

д) если число при делении на 15 дает остаток 3, то при делении на 9 остаток не равен 6.

4. Во сколько раз изменятся частное и остаток от деления, если делимое и делитель увеличить в 3 раза?

5. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

6. Олег собрал мешочек монет и пересчитал их. Оказалось, что если разделить все монеты на пять равных кучек, то останется две лишние монеты. А если на четыре равные кучки – останется одна лишняя монета. В то же время монетки можно разделить на три равные кучки. Какое наименьшее число монет могло быть у Олега?

7. Если число, не превышающее 10000, делить на 9, получится остаток 8; если делить на 8, получится остаток 7, на 7 – 6, на 6 – 5, на 5 – 4, на 4 – 3, на 2 – 1. Что же это за число могло быть?

8. Существует ли такое целое число, которое при делении на 12 дает остаток 11, а при делении на 18 – остаток 1?

9. Найдите остаток от деления числа N на 30, если известно, что остаток от деления N на 15 равен 7, а остаток от деления N на 6 равен 4.