ЗАНЯТИЕ 4. НОД И НОК

Наименьшим общим кратным (НОК) двух целых чисел m и n называется наименьшее натуральное число, которое делится без остатка и на m, и на n. Обычно обозначается: НОК(m, n).

Наибольшим общим делителем (НОД) двух целых чисел m и n называется наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа m и n. Наибольший общий делитель определён, если хотя бы одно из чисел m или n не равно нулю. Будем обозначать наибольший общий делитель чисел m и n так: НОД(m, n).

Числа m и n называются **взаимно-простыми**, если НОД(m, n)=1.

Свойство: $НОК(a,b) = a \cdot b \,/\, НОД(a,b)$

Пример 1: Найдите НОК(a, b) и НОД(a, b), если $a = 10920 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, $b = 14250 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 19$.

Решение: $НОК(a,b) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 = 5187000$;

$НОД(a,b) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Пример 2: Найдите все пары натуральных чисел a и b, таких что: НОД(a, b) = 11, НОК(a, b) = 660.

Решение: 1) Так как НОД двух чисел равен 11, то оба числа в разложении на простые множители содержат ровно один общий простой множитель – 11.

2) Разложим значение НОК этих чисел на простые множители: $660 = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Хотя бы в одном из чисел a или b в разложении на простые множители содержится две двойки, тройка, пятерка, одиннадцать.

3) Рассмотрим все варианты удовлетворяющие пунктам 1) и 2):

Первое число	Второе число
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 660$	11
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$	$5 \cdot 11 = 55$
$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 = 220$	$3 \cdot 11 = 33$
$2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$	$3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$

Ответ: 660 и 11; 132 и 55; 220 и 33; 44 и 165.

Факториалом натурального числа N (обозначается $N!$) называют произведение всех натуральных чисел от 1 до N включительно: $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N$.

Пример 3: Известно, что $a = 10! - 9!$, $b = 10!$, найдите НОД(a, b) и НОК(a, b).

Решение: $a = 10! - 9! = 9! \cdot 10 - 9! = 9! \cdot (10-1) = 9! \cdot 9 = 9! \cdot 3 \cdot 3$;

$b = 10! = 9! \cdot 10 = 9! \cdot 2 \cdot 5$

$НОД(a,b) = НОД(9! \cdot 3 \cdot 3,\ \ 9! \cdot 2 \cdot 5) = 9!$;

$НОК(a,b) = НОК(9! \cdot 3 \cdot 3,\ \ 9! \cdot 2 \cdot 5) = 9! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 9! \cdot 90$.

Ответ: $НОД(a,b) = 9!$; $НОК(a,b) = 9! \cdot 90$.

ЗАДАНИЕ

1. На столе лежат книги, число которых меньше, чем 200. Сколько может лежать книг, если известно, что их можно связывать пачки по 3, по 4, и по 5 штук?

2. Ванна заполняется холодной водой за 6 минут, горячей – за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 12 минут. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой? *Решите задачу без использования дробей.*

3. Найдите НОК(a, b) и НОД(a, b), если $a = 18200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, $b = 16500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$.

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, если НОД(a, b) = 13, а НОК(a, b) = 78.

5. Известно, что $a = 18! + 19!$, $b = 20! - 19!$, найдите НОД(a, b) и НОК(a, b).

6. Существуют ли 6 последовательных натуральных чисел таких, что наименьшее общее кратное первых трех из них больше, чем наименьшее общее кратное трех последних?