

ЗАНЯТИЕ 5. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ РАСКРАСКА

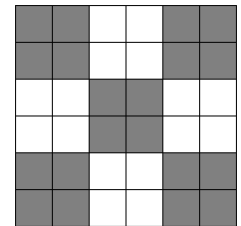
Нередко для решения задач используется вспомогательная раскраска.

Нередко используют «матрасную» раскраску, диагональную раскраску в несколько цветов и другие. Но особенно популярна шахматная раскраска. Она универсальна и подходит для решения большого круга задач.

Пример 1. Можно ли доску 6×6 разрезать на дощечки 1×4 ?

Решение: Раскрасим поле «шахматной» раскраской, но будем красить не каждую клетку, а квадраты 2×2 . Как бы мы ни вырезали дощечку 1×4 , она будет содержать поровну черных и белых клеток. Значит, разрезав доску на дощечки, мы так же получим поровну черных и белых клеток. Но на доске 6×6 всего 20 черных и 16 белых клеток. Значит, разрезать доску на такие дощечки нельзя.

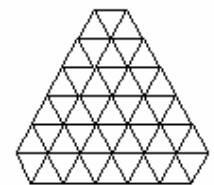
Ответ: Нельзя.



Пример 2: Можно ли шестиугольный торт (см. рисунок) разрезать по указанным линиям на 23 равных куска?

Решение: Всего в торте 46 «треугольников», значит, мы должны разрезать торт на фигурки, состоящие из двух треугольников с общей стороной. Раскрасим торт в «шахматном» порядке. Получается, что каждый отрезанный кусок будет окрашен ровно в два цвета. Значит, если торт можно разрезать, то цветов будет поровну. Но в нем 21 черный треугольник и 25 белых. Следовательно, разрезать нельзя.

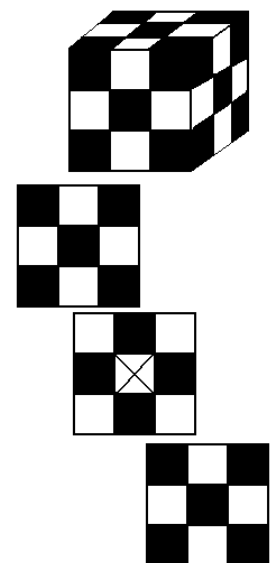
Ответ: Нельзя.



Пример 3: Кубик-Рубика – кубик 3×3 , состоящий из 26 кубиков с центральным шарниром. Вася отчаялся его собирать и решил схитрить. Он начинает отламывать отдельные кубики. Причем, отломав один кубик, следующим он отламывает один из соседних (граничащий с предыдущим по стороне). Сможет ли Вася выломать все кубики?

Решение: Раскрасим кубик в шахматном порядке. На рисунке показана раскраска по слоям. Вася отрывает кубики, чередуя цвета: ...-черный-белый-... . Значит, кубиков разных цветов либо поровну (начал с одного цвета, закончил другим), либо они отличаются на 1 (начал и закончил одним цветом). Но в кубе 14 черных кубиков и 12 белых. Значит, оторвать все не получится.

Ответ: Не сможет.



ЗАДАНИЕ

Во всех задачах с вопросом «Можно ли...» нужно либо показать, как сделать, либо обосновать, почему нельзя добиться желаемого.

1. Из обычной шахматной доски 8×8 вырезали клетки **а)** противоположные по стороне (a1 и h1), **б)** противоположные по диагонали (a1 и h8). Можно ли то, что осталось, замостить доминошками 1×2 ?

2. Можно ли доску 6×6 с двумя вырезанными противоположными углами обойти ходом шахматного коня, побывав в каждой клетке ровно по одному разу?

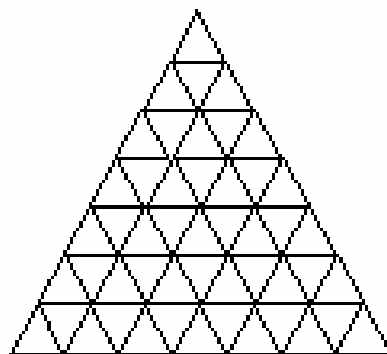
3. Фигура "верблюд" ходит по доске 10×10 ходом типа (1, 3). То есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении (конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом "верблюда" с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

4. Илье дали целый ящик с фигурками в виде "пьедестала". Сможет ли он замостить ими шахматную доску 10×10 ?

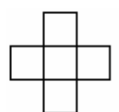


5. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки взлетают и приземляются на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что при этом окажется хотя бы одна пустая клетка.

6. Замок имеет форму правильного треугольника, разбитого на 49 залов, каждый из которых тоже имеет форму правильного треугольника (см. рисунок). В стене между любыми двумя залами есть дверь. Путник хочет обойти как можно больше залов, не заходя ни в один дважды. Какое наибольшее количество залов ему удастся обойти?



7. Можно ли доску 75×75 , от противоположных углов которой отпилены два квадрата 3×3 , разрезать на прямоугольники 1×2 и (или) пентамино «крест»?



8. Можно ли шахматную доску с вырезанной угловой клеткой покрыть одинаковыми прямоугольными плитками размером 1×3 клетки?