ЗАНЯТИЕ 7. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО.

Что такое принцип Дирихле? По традиции обычно принцип Дирихле объясняют на примере «кроликов» и «клеток»: Если N зайцев сидят в n клетках и $N > n$, то хотя бы в одной клетке сидит более одного зайца. А если $N < n$, то хотя бы одна из клеток пуста.

Пример 1. Верно ли, что среди любых 11 натуральных чисел найдется два числа, разность которых делится на 10?

Решение. *Пусть «кролики» – это числа, а «клетки» – это последние цифры в десятичной записи выбранных чисел. Тогда «кроликов» 11, а «клеток» всего 10, поскольку различных цифр всего 10 (0, 1, …, 9). «Кроликов» больше, чем «клеток», значит, по принципу Дирихле, найдется «клетка», в которой есть хотя бы два «кролика». Другими словами: Найдутся два числа, у которых в десятичной записи совпадает последняя цифра. Разность этих двух чисел будет оканчиваться на 0, а значит, будет делиться на 10.*

Ответ: *верно.*

Суть метода от противного:

1. *Делается предположение, противоположное тому, что требуется доказать;*
2. *Выясняется, что следует из сделанного предположения;*
3. *Устанавливается несоответствие (противоречие) предположения с данными условия;*
4. *Делается вывод о том, что наше предположение неверно, а верно противоположное ему утверждение, т.е. то, что требуется доказать.*

Пример 2. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

Решение. *Докажем от противного.*

Предположим, что можно так разложить шарики. Тогда всего шариков не меньше, чем 1+2+3+…+9=45 (рассматриваем минимальные различные количества шариков в кучках). То есть шариков должно быть не менее 45, а их всего 44. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно. Так разложить шарики нельзя.

Ответ: *нельзя.*

ЗАДАНИЕ

1. В Летней математической школе занимается 73 ученика. Верно ли, что можно выбрать семерых из них, у которых День рождения в одном месяце?

2. В поход пошли 20 туристов. Самому старшему из них 35 лет, а самому младшему 17 лет. Верно ли, что среди туристов есть хотя бы двое одного возраста?

3. Занятия математического кружка проходят в девяти аудиториях. Среди прочих, на эти занятия приходят 19 учеников из одной и той же школы.

а) докажите, что как их не пересаживай, хотя бы в одной аудитории окажется не меньше трех таких школьников.

б) верно ли, что в какой-нибудь аудитории обязательно окажется ровно три таких школьника?

в) если в одной аудитории оказались ровно 10 учеников из этой школы, то верно ли, что в какой-то другой аудитории их окажется не менее двух?

4. В лагерь приехали 145 детей Их разбили на 6 отрядов. Верны ли следующие утверждения:

а) найдется отряд, в котором не менее 25 детей;

б) найдется отряд, в котором меньше 25 детей;

в) найдется отряд, в котором ровно 25 детей?

5. Во время диктанта ученики класса всего сделали 211 ошибок. Федя допустил в своей работе 20 ошибок, а остальные ученики – меньше. Докажите, что хотя бы два ученика сделали одинаковое количество ошибок.

6. Грани куба окрашены в два цвета. Докажите, что найдутся две соседние одноцветные грани.

7. Десять школьников на олимпиаде решили всего 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Обязательно ли есть школьник, решивший не менее пяти задач?