ЗАНЯТИЕ 8. ОЦЕНКА + ПРИМЕР.

Решение задач на нахождение наибольшего или наименьшего количества всегда состоит из двух частей:

1) Оценка – в этой части мы доказываем почему найденное нами значение самое большое (самое маленькое), почему его нельзя увеличить (уменьшить);

2) Пример – в этой части мы объясняем, почему найденное значение удовлетворяет условию задачи. Чаще всего в качестве такого объяснения будет необходимо привести конкретный пример. Но есть задачи, где в качестве «примера» будет приводиться содержательное доказательство того факта, что найденное значение подходит.

Пример 1. У Хозяйки есть 5 одинаковых пирожков, которыми она хочет угостить 6 гостей. Хозяйка умеет отрезать от пирожка любую часть. Какое наименьшее число разрезов потребуется, чтобы можно было разделить всё угощение поровну между всеми пришедшими гостями?

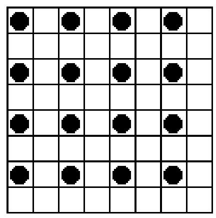
Решение. ОЦЕНКА: Если хотя бы один из пирожков будет целым, то получивший его будет иметь большую часть, чем другие. Значит, надо резать каждый пирожок => разрезов не менее 5.

ПРИМЕР: От каждого пирожка отрежем $\frac{1}{6}$. Пять гостей возьмут по большому куску пирожка, шестой – пять маленьких кусков. Каждый получит по $\frac{5}{6}$ пирожка.

Ответ: 5 разрезов.

Пример 2. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Решение. ОЦЕНКА: Разобьем доску на 16 **непересекающихся** областей – квадратов со стороной 2 клетки. Заметим, что в любом таком квадрате не может стоять более одного короля. Значит, на поле не может быть более 16 королей.



ПРИМЕР: см. рис.

Заметим, без примера оценка могла бы оказаться завышенной, ведь короли из разных квадратов, вообще-то, могут бить друг друга. Однако нам удалось построить правильный пример, значит, оценка верная.

Ответ: 16 королей.

Пример 3. Из стандартных игральных кубиков ученики строили башни, причем любые два кубика касаются гранями, на которых в сумме 8 точек. Какую наибольшую высоту может иметь такая башня? (*Стандартные игральные кубики устроены так, что у них на противоположных гранях в сумме 7 точек*)

Решение. ОЦЕНКА: Представить 8 в виде суммы двух натуральных чисел от 1 до 6 можно только так $8 = 6+2 = 5+3 = 4+4$ – только у 1 нет «пары». Возьмем башню наибольшей высоты. Если на ее верхней или нижней грани не 1, то можно добавить еще хотя бы один кубик, что противоречит нашему выбору самой высокой башни. Поскольку кубики стандартного вида, эта башня восстанавливается единственным образом, ее высота не более шести.

ПРИМЕР: (1|6) (2|5) (3|4) (4|3) (5|2) (6|1).

Ответ: 6 кубиков.

ЗАДАНИЕ

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5 и 97 (нужно доказать максимальность указанного числа).

2. Таблица 9×10 заполнена числами 0, 1 и -1 так, что сумма чисел в любом квадрате 3×3 равна нулю. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы?

3. В вершине куба можно написать одно из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Числа не должны повторяться. На концах каждого ребра числа должны быть взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть написано?

4. Какое наименьшее количество клеток надо отметить на доске 7×7 так, чтобы в каждом квадрате 3×3 было отмечено ровно 3 клетки?

5. За какое наименьшее число разрезов можно разрезать шахматную доску на единичные квадраты, если резать можно только прямыми разрезами, при этом **а)** части доски нельзя перекладывать и накладывать друг на друга; **б)** части доски можно перекладывать и накладывать друг на друга?

6. Какое наибольшее число попарно различных квадратов можно уместить в прямоугольную коробку 5×7?

7. Какое наибольшее суммарное количество белых и чёрных шашек можно расставить в клетках доски 8×8 так, чтобы выполнялось следующее условие: в каждой горизонтали и в каждой вертикали белых шашек должно быть в два раза больше, чем чёрных?