Т. СТРУКОВ,
Москва

Устная олимпиада

В нашей школе № 2007 время от времени уроки проводятся по нестандартной схеме. Один из возможных подходов — уроки-соревнования, которые целесообразны при повторении тех или иных тем школьного курса. Такие уроки вносят в преподавание разнообразие, способствуют поддержанию интереса к предмету. Правда, проводить их следует не слишком часто, иначе эффективность снижается. Пример одного урока предлагаю вашему вниманию.

Тема: «Повторение методов решения уравнений, неравенств и их систем»

Цель: напомнить учащимся о приемах, применяемых при решении уравнений, неравенств и их систем, таких как использование свойств монотонности и ограниченности функций; свойств симметрических и однородных многочленов, а также других видов симметрии многочленов.

Время: 2 урока.

Организация занятия: занятие организовано в режиме «устной олимпиады», поэтому необходима помощь коллег-учителей или выпускников — студентов вузов математических специальностей. Они составляют жюри.

Учащиеся работают в парах: каждая пара получает одинаковые наборы из 10 задач. Как только какая-нибудь из задач решена, один из учащихся рассказывает ее одному из членов жюри, имея при себе краткую запись решения. На изложение решения каждой задачи даются две попытки. Если все они использованы, а решение задачи не принято, задача считается нерешенной. Каждый учащийся может рассказывать решения не более пяти различных задач.

За работу выставляется отметка. Как оценивать работу учащихся, определяет учитель, причем правила оценивания объявляются заранее. В нашем случае учащиеся одной пары получали одинаковые отметки. Формула проста: количество задач, решенных парой, делится пополам.

Условия задач

1. Найдите положительные корни уравнения
$$\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6.$$

2. Решите неравенство
$$|x^7+4x^5+x^2+2x-3|<x^7+4x^5-x^2-2x+3.$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^8+\dfrac{1}{y^8}=y^8+\dfrac{1}{x^8}, \\ x^2+xy+2y^2=16. \end{cases}$$

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2=2+(y-z)^2, \\ y^2=3+(z-x)^2, \\ z^2=6+(x-y)^2. \end{cases}$$

5. При каких значениях a уравнение
$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=2x+a^2+2a$$
имеет корни и сколько их?

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+2xy^2+y^3=2. \end{cases}$$

7. Решите уравнение
$$x=\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right).$$

8. Решите неравенство
$$(x^2+x+4)(x^2+2x+5)>13.$$

9. Найдите все тройки x, y и z, удовлетворяющие условиям
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3,\quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3,\quad \frac{1}{xyz}=1.$$

10. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$$

Ответы и решения

1. 2.

Способ I. Пусть $\sqrt[4]{x^4+x-2}=a$, тогда уравнение можно переписать в виде $a^2+a-6=0$, при условии, что $a\geq 0$. Получим: $(a-2)(a+3)=0$, откуда $a=2$. Осталось решить уравнение $\sqrt[4]{x^4+x-2}=2$. Получим:
$$x^4+x-2=16,\ x^4+x-18=0,$$

$$(x-2)(x^3+2x^2+4x+9)=0,$$

$x=2$ — корень. Уравнение $x^3+2x^2+4x+9=0$ положительных корней не имеет.

Способ II. Пусть $x^4+x=y$, тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{y-2}+\sqrt[4]{y-2}=6.$$

Функция

$$f(x)=\sqrt{y-2}+\sqrt[4]{y-2}$$

возрастает на области определения как сумма двух возрастающих функций и, следовательно, имеет не более одного корня. Этот единственный корень находим подбором. Получим: $y=18$. Решение уравнения $x^4+x-18=0$ рассмотрено в способе I.

2. $(0; 1)$.

Пусть $a=x^7+4x^5$, а $b=x^2+2x-3$. Тогда исходное неравенство равносильно $|a+b|<a-b$. Последнее условие равносильно системе:

$$\begin{cases}(a+b)^2<(a-b)^2,\\ a>b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab<0,\\ a>b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ b<0.\end{cases}$$

Осталось решить систему неравенств:

$$\begin{cases}x^7+4x^5>0,\\ x^2+2x-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^5\left(x^2+4\right)>0,\\ (x+3)(x-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ -3<x<1.\end{cases}$$

3. $(2; 2)$, $(-2; -2)$, $\left(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$x^8-\frac{1}{x^8}=y^8-\frac{1}{y^8}.$$

Рассмотрим

$$f(t)=t^4-\frac{1}{t^4}.$$

Докажем, что на интервале $t\in(0; +\infty)$ функция $f(t)$ возрастает. Действительно,

$$f'(t)=4t^3+\frac{4}{t^5}>0$$

на указанном интервале. Следовательно, уравнение $f(x^2)=f(y^2)$ равносильно уравнению $x^2=y^2$, откуда следует, что $x=y$ либо $x=-y$. Осталось разобрать случаи:

1) $x=y$; из уравнения $x^2+xy+2y^2=16$ получим: $x=y=\pm 2$;

2) $x=-y$; получим: $x=\pm 2\sqrt{2},\ y=\mp 2\sqrt{2}$.

4. $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$, $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; -2\right)$.

Перенесем переменные в левые части, разложим разность квадратов в произведение:

$$\begin{cases}(x-y+z)(x+y-z)=2,\\ (y-z+x)(y+z-x)=3,\\ (z-x+y)(z+x-y)=6.\end{cases}$$

Пусть $x-y+z=a$, $x+y-z=b$, $y+z-x=c$. Получим систему

$$\begin{cases}ab=2,\\ bc=3,\\ ca=6.\end{cases}$$

Перемножим все уравнения и извлечем квадратный корень, получим: $a^2b^2c^2=36$. Возможны два случая.

1. $abc=6$. Разделив полученное произведение на каждое из уравнений системы, получим, что $a=1$, $b=2$, $c=3$. Осталось решить систему

$$\begin{cases}x-y+z=3,\\ x+y-z=2,\\ y+z-x=1.\end{cases}$$

Для этого сложим последовательно первое и второе, второе и третье, третье и первое уравнения системы.

2. В случае $abc=-6$ решение аналогично.

5. Если $-3\le a\le 1$, то уравнение имеет единственный корень. В других случаях корней нет.

Перепишем исходное уравнение в виде

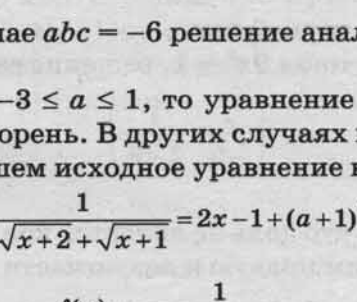
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=2x-1+(a+1)^2.$$

Пусть

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}},$$

$$g(x)=2x-1+(a+1)^2$$

на $[-1; +\infty)$, причем поскольку $f(x)$ убывает на общей области определения, а $g(x)$ возрастает, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня. При этом, если $x\to+\infty$, $f(x)\to 0$, $g(x)\to+\infty$. Из соображений непрерывности (см. рис.), уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственный корень, если $g(-1)\le f(-1)$, то есть если $-3+(a+1)^2\le 1$, откуда $(a+1)^2\le 4$. Получаем: $-3\le a\le 1$.



6. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\frac{1}{2\sqrt[3]{9}}\right).$

Умножим первое уравнение системы на 2 и подставим в правую часть второго уравнения:

$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+2xy^2+y^3=2\left(x^3+y^3\right). \end{cases}$$

После преобразования второго уравнения получим однородное уравнение третьей степени $2x^3+y^3-x^2y-2xy^2=0$.
Разделим обе части уравнения на y^3 и выполним замену $\frac{x}{y}=t$. (Заметим, что при $y=0$ решений системы нет.) Получим уравнение

$$2t^3-t^2-2t+1=0,$$

откуда

$$(t-1)(2t^2+t-1)=0.$$

Получим корни $t_{1,2}=\pm1$, $t_3=\frac{1}{2}$. Делаем обратную замену. Теперь для решения системы надо разобрать случаи:

1) $x=y$, тогда $2x^3=1$, решение системы

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right);$$

2) $x=-y$, корней нет;
3) $y=2x$, тогда $9x^3=1$, решение системы

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\frac{1}{2\sqrt[3]{9}}\right).$$

7. 2.
Заметим, что ноль не является корнем уравнения. Умножим правую и левую части на выражение $\sqrt{x+1}-1\neq0$. Получим:

$$x\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right),$$

откуда $x^3+x^2-6x=0$, и так как $x\neq0$, то $x^2+x-6=0$, откуда $x=2$ или $x=-3$. Проверка показывает, что второй корень является посторонним.

8. $x\in\mathbb{R}$.
Перепишем неравенство в виде

$$\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3\frac{3}{4}\right)\left((x+1)^2+4\right)>13,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3\frac{3}{4}\geq3\frac{3}{4},$$

$$(x+1)^2+4\geq4.$$

Произведение этих двух выражений будет больше либо равно 15, а следовательно, больше 13 при любом значении x.

9. (1; 1; 1).
Пусть $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, $\frac{1}{z}=c$. Решим систему. Тогда

$$\begin{cases} a+b+c=3, \\ ab+bc+ca=3, \\ abc=1. \end{cases}$$

Числа a, b и c (по теореме Виета) являются корнями кубического уравнения $t^3-3t^2+3t-1=0$, откуда $t=1$ (кратности 3). Последнее означает, что $a=b=c=1$. Значит, $x=y=z=1$.

10. (1; 1; 0).
Способ I. Выразим x из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$(2-y)y-1-z^2=0,\ y^2-2y+1+z^2=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-z^2$. Следовательно, $z=0$, откуда легко получаем ответ, решив тем или иным способом систему

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=1. \end{cases}$$

Способ II. Преобразуем данную систему:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2, \\ xy=z^2+1. \end{cases}$$

Заметим, что из второго уравнения следует, что x и y — одного знака. Учитывая первое, получаем, что $x>0$, $y>0$. Следовательно, $xy\geq1$, откуда

$$y\geq\frac{1}{x},\ x+\frac{1}{x}\leq2,\ (x-1)^2\leq0,\ x=1.$$

Отсюда и получаем остальные корни.
Способ III. Можно немного иначе: из теоремы Виета следует, что числа x и y являются корнями уравнения $t^2-2t+z^2+1=0$. Это уравнение можно переписать в виде $(t-1)^2+z^2=0$, откуда получаем, что $z=0$ и т.д.

Комментарий. Уроки проводились 9 апреля 2009 г. в 11-м классе (26 учащихся — 13 команд). Каждая из задач была решена хотя бы одной из команд. Статистика решенных задач приведена ниже.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество решивших команд	13	11	5	5	2	8	11	11	9	13

В статье представлены решения, выполненные учащимися.

Литература

1. *Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я.* Симметрия в алгебре. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2002.
2. *Кармакова Е.Е., Рыбакова Н.Н., Ховрина В.В.* Тригонометрическая регата//Математика, 2008, № 9.
3. *Чулков П.В.* Уравнения и неравенства в школьном курсе математики. — 2-е изд. — М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006.