Теорема о большей стороне треугольника

Ховрина В.В., Прокопенко Д.В., ФМШ 2007, Москва

Геометрические неравенства традиционно вызывают трудности у школьников, поэтому мы пробуем давать их уже в 7 классе, когда запас геометрических конструкций еще не очень большой. Кроме того, в начале 7 класса в курсе геометрии не хватает содержательных геометрических задач. Мы считаем важным показать такие задачи и дать инструмент для их решения.

Например, неравенство треугольника мы будем доказывать дважды в 7 классе. Сначала в первом полугодии до теоремы о сумме углов треугольника, потом во втором полугодии в теме «Вписанная окружность треугольника», и еще раз через год. Первое доказательство, мы приведем в основной части статьи, второе – в Приложении.

Кружок состоит из двух частей. В первой мы обсудим теорию, запишем формулировки теорем, приведем примеры стандартных, но еще непривычных в начале 7 класса дополнительных построений и докажем неравенство треугольника. Вторая часть – самостоятельное решение задач. Неравенство треугольника в задачах использоваться не будет, для этого есть отдельное занятие кружка.

Необходимый теоретический материал: свойство смежных углов, признаки равенства треугольников, равенство углов при основании равнобедренного треугольника (используется в доказательстве неравенства треугольника). Все задачи могут быть решены без теоремы о сумме углов треугольника. Материалы кружка авторы частично использовали на уроках во второй четверти 7 класса ФМШ 2007.

Часть 1. Обсуждение теории.

Сформулируем все утверждения, которые мы докажем.

1. **Внешний угол треугольника больше любого угла треугольника, не смежного с ним.**

   Следствия. Если в треугольнике есть прямой (тупой) угол, то он только один, и он – наибольший.

2. **Теорема о большей стороне треугольника**. В любом треугольнике против большей стороны всегда лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона.

Следствия. а) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. б) В треугольнике против тупого угла лежит наибольшая сторона.

Эти следствия можно при первом знакомстве с темой пропустить.

3. **Неравенство треугольника**. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Перейдем к доказательствам. Сначала напомним определение.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.

Докажем свойство внешнего угла треугольника.

1. **Теорема**. **Внешний угол треугольника больше любого угла треугольника, не смежного с ним.**

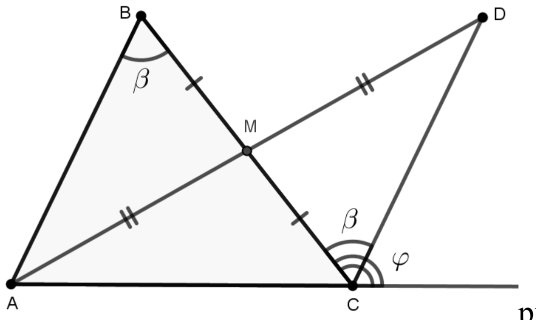


рис. 1

Рассмотрим треугольник *ABC*,в котором $\angle B = \beta$, внешний угол при вершине *C* равен φ. Докажем, что $\beta < \varphi$.

Проведем медиану AM и удвоим ее, получим отрезок *AD*, $AD = 2AM$. Тругольники *ABM* и *DCM* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle MCD = \beta$. Заметим, что угол *MCD* – часть внешнего угла *BCD*, значит, $\varphi > \beta$ (рис. 1).

Аналогично можно доказать, что $\varphi > \angle BAC$.

Из этой теоремы можно получить два следствия.

Если в треугольнике есть прямой (тупой) угол, то он только один, и он – наибольший.

Докажем это.

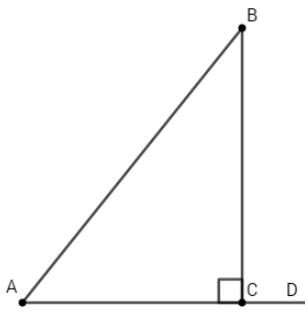


рис.2

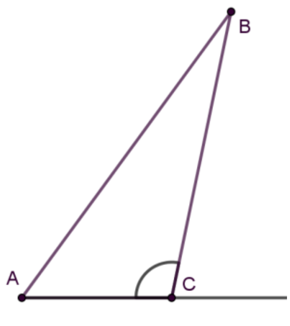


рис.3

Пусть в треугольнике *ABC* угол *C* – прямой (рис. 2). Тогда внешний угол при вершине *C* – тоже прямой. Используя утверждением о том, что внешний угол треугольника больше любого угла треугольника, не смежного с ним, получим, что углы *A* и *B* – острые.

Доказательство следствия 2 аналогично.

2. **Теорема о большей стороне и большем угле треугольника.**

а) *В любом треугольнике против большей стороны всегда лежит больший угол.*

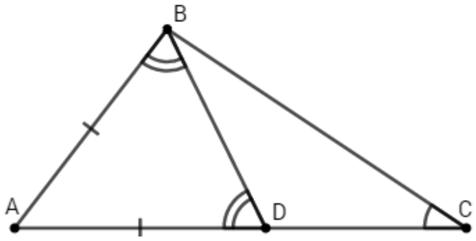


рис. 4

Пусть в треугольнике ABC AC – наибольшая сторона. Докажем, что угол B – наибольший.

Отложим на стороне AC от точки A отрезок AD, равный AB. В равнобедренном треугольнике ABD углы при основании равны $\angle ABD = \angle ADB$. Угол ADB – внешний для треугольника DBC, следовательно, по утверждению о внешнем угле треугольника $\angle ADB > \angle C$. Поскольку угол ABC содержит угол ABD, равный углу ADB, то в треугольнике ABC $\angle B > \angle C$. Аналогично можно доказать, что $\angle B > \angle C$.

б) *В любом треугольнике против большего угла всегда лежит большая сторона.*

Докажем методом «от противного». Пусть угол B – наибольший. Предположим, что сторона AC – не наибольшая. Пусть AB – наибольшая сторона. По доказанному против наибольшей стороны лежит наибольший угол C, что противоречит условию.

Применим теорему о наибольшем угле для доказательства неравенства треугольника.

3. Неравенство треугольника.

В любом треугольнике ABC выполняется неравенство $AC < AB + BC$.

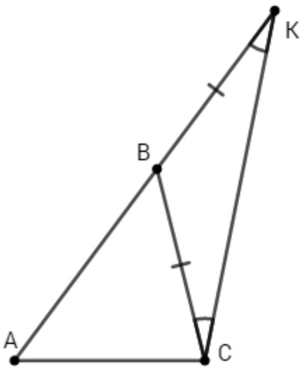


рис.5

Доказательство. Отложим на стороне AB за точку B отрезок BK, равный BC. В равнобедренном треугольнике BKC углы BKC и BCK равны. Следовательно, в треугольнике AKC $\angle ACK > \angle AKC$. Тогда по теореме о наибольшем угле $AK > AC$. Заменив AK на сумму $AB + BK$, получим, что $AB + BK > AC$. Учитывая, что $BK = BC$, получим , что $AB + BC > AC$.

После обсуждения теории на доске лучше оставить все рисунки выше.

Часть 2. Задачи для самостоятельного решения:

1. Докажите самостоятельно теорему о большей стороне треугольника.

2. Дан треугольник. Какие из утверждений являются верными, а какие нет: а) угол *A* больше угла *B*, следовательно, *CA* больше *CB*; б) *AB* меньше *BC*, следовательно, угол *C* меньше угла *A*.
3. Используя теорему о большей стороне треугольника докажите, что отрезок перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, короче любой наклонной, проведенной из этой точки к прямой.
4. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AP* и *CN*, которые пересекаются в точке *H*, лежащей внутри треугольника. Может ли угол *AHC* оказаться острым?
5. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BD*. Докажите, что *AB* больше *AD*.
6. В треугольнике *ABC* взята произвольная точка *O*. Докажите, что угол *AOC* больше угла *ABC*.
7. В равнобедренном треугольнике *ABC* на продолжении основания *BC* за точку *C* взята точка *D*. Докажите, что угол *ABC* больше угла *ADC*.
8. На основании равнобедренного треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что отрезок, соединяющий ее с противоположной вершиной, короче боковой стороны.
9. В треугольнике *ABC* провели медиану *BM*. Известно, что *AB* больше *BC*. Сравните углы *ABM* и *CBM*.
10. У треугольника *ABC* угол *C* – тупой. Докажите, что если точка *X* лежит на стороне *AC*, то $BX < AB$.
11. В треугольнике *ABC* угол *C* – тупой. Докажите, что если точка *X* лежит на стороне *AC*, а точка *Y* – на стороне *BC*, то *XY* меньше *AB*.
12. На основании равностороннего треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что отрезок, соединяющий ее с противоположной вершиной, короче стороны.
13. На сторонах (но не в вершинах) равностороннего треугольника отметили две точки. Докажите, что расстояние между ними короче стороны.
14. Внутри равностороннего треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что соединяющий их отрезок меньше его стороны.

15. В треугольнике *ABC* найдите точку, из которой сторона *AB* видна под наименьшим углом.

Приведем комментарии и указания к решению некоторых задач.

Задача 5. *В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что AB больше AD.*

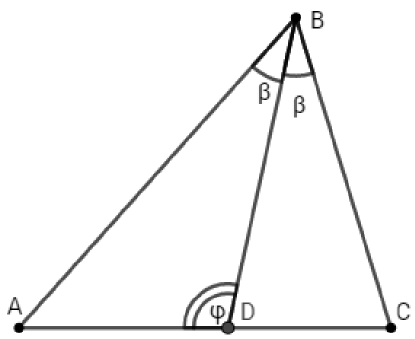


рис.6

Действительно, по теореме о внешнем угле для треугольника *BDC* $\varphi > \beta$ (рис.6). В треугольнике *ABD* против большего угла $(\varphi > \beta)$ лежит большая сторона. Следовательно, *AB* > *BD* ч.т.д.

Задача решена, но стоит сделать еще один шаг. Аналогично *BC* > *CD*. Тогда *AB* + *BC* > *AD* + *CD* = *AC*. Итак, мы еще раз доказали неравенство треугольника.

Решение Задачи 6 интересно тем, что дополнительное построение очень похоже на то, что используется при доказательстве теоремы о вписанном и центральном угле в окружности.

Задача 6. *В треугольнике ABC взята произвольная точка O. Докажите, что угол AOC больше угла ABC.*

Способ 1. $\varphi_1 > \beta_1$, $\varphi_2 > \beta_2$.

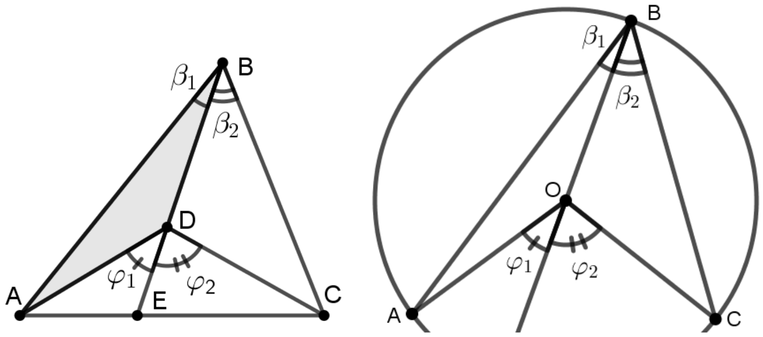


рис.7

Способ 2. $\varphi > \theta > \beta$.

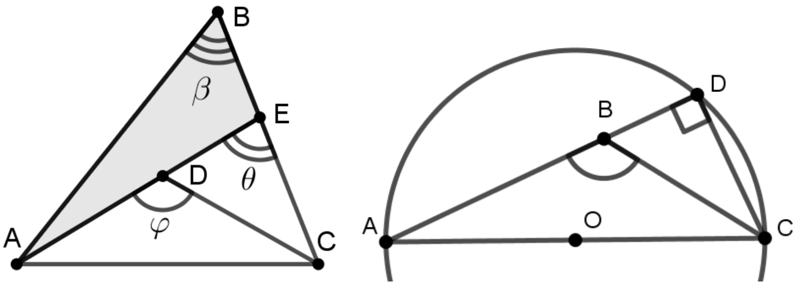


рис.8

Интересно, что эти же дополнительные построения мы будем использовать и позже. Для примера рядом мы поместили в Способе 1 теорему о центральном и вписанном угле. Аналогично Способу 2 доказывается, что угол с вершиной внутри окружности, стороны которого проходят через концы диаметра – тупой.

Задача 9. *В треугольнике ABC провели медиану BM. Известно, что AB больше BC. Сравните углы ABM и CBM.* Надо удвоить медиану.

Задача 10. *У треугольника ABC угол C – тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, то* $BX < AB$.

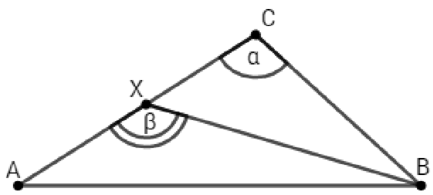


рис.9

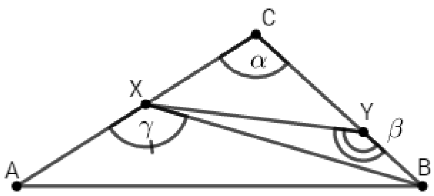


рис.10

Указание к решению (рис.9). По теореме о внешнем угле треугольника $\beta > \alpha > 90°$. Следовательно, в треугольнике *AXB* сторона *AB* – наибольшая.

Задача 11. *В треугольнике ABC угол C – тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, а точка Y – на стороне BC, то XY меньше AB.*

Указание к решению (рис.10). Проведем *XB* и применим дважды задачу 10 *AB* > *XB* и *XB* > *XY*.

Задача 12. *На основании равностороннего треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что отрезок, соединяющий ее с противоположной вершиной, короче стороны.*

Задача 13. *На сторонах (но не в вершинах) равностороннего треугольника отметили две точки. Докажите, что расстояние между ними короче стороны.*
Указание к решению. Аналогично задачам 10 и 11.
Задача 14. *Внутри равностороннего треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что соединяющий их отрезок меньше его стороны.*
Указание к решению. Продолжим этот отрезок до пересечения со сторонами треугольника и воспользуемся результатом задачи 13.

Задача 15. *В треугольнике ABC найдите точку, из которой сторона AB видна под наименьшим углом.*
Указание к решению. Надо воспользоваться результатом задачи 6.

Приложение I

Напомним, что материал этой статьи мы давали примерно на месяц раньше параллельности прямых. Оказалось, что это можно использовать. Например, в качестве бонуса мы получаем простое доказательство признака параллельности прямых.
Теорема. Пусть прямые a и b пересекаются прямой c, внутренние накрест лежащие углы равны. Тогда прямые a и b параллельны.

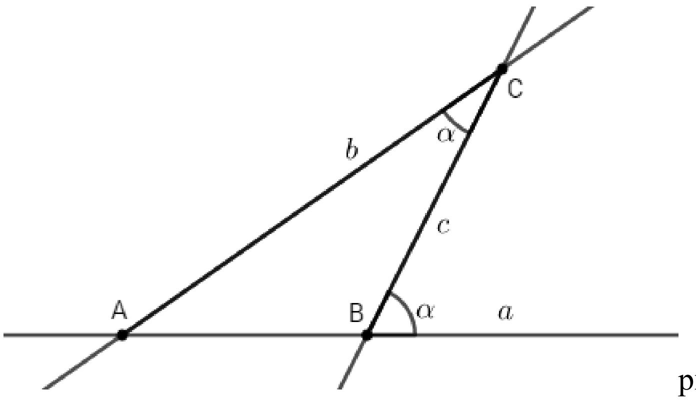


рис.11

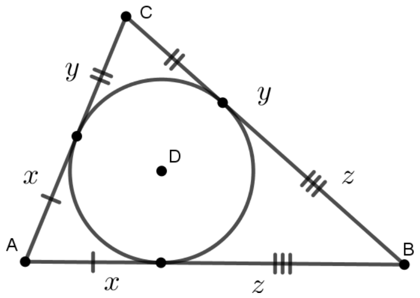
Действительно, предположим, что прямые a и b пересекаются в точке A. Тогда для образовавшегося треугольника ABC (рис.11) внешний угол при вершине B больше внутреннего угла ACB, что противоречит условию.

Приложение II

С идеей другого доказательства неравенства треугольника авторов познакомил В.В. Трушков. В учебниках обычно приводят доказательство с помощью теоремы Пифагора и переносят его в 8 класс.

Мы считаем полезным коллекционировать такие простые и естественные доказательства классических теорем (на уровне древнегреческого «Смотри!») и возвращаться к ним при изучении новых тем.

Итак, неравенство треугольника, которое можно давать в теме «вписанная окружность треугольника». Свойство касательных к окружности уже должно быть хорошо знакомо.



Доказательство ОчеВидно, не так ли?

Список литературы:

1. Волчкевич М.А., Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы. М.: МЦНМО, 2017.

2. Математические регаты, материалы на сайте http://olympiads.mccme.ru/regata/