Задачи для самостоятельного решения

9. В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Докажите, что найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых.

10. Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2\times2\times2$, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

11. В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят числа 1 и -1, причем сумма всех чисел не больше 100 и не меньше -100. Докажите, что есть квадрат 25×25, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25.

12. Дан выпуклый многоугольник и точка а) вне, б) внутри него. Докажите, что его можно разбить на две равновеликие части прямой, проходящей через заданную точку.

13. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0;1]$. Докажите, что на этом отрезке найдется такое число x, что

$$\frac{1}{n}\left(|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|\right)=\frac{1}{2}.$$

Список литературы для дальнейшего изучения

1. *С.Табачников*. Соображения непрерывности. – «Квант», 1987, №9.

2. *А.Д.Блинков, В.М.Гуровиц*. Непрерывность. – М.: МЦНМО, 2015.

3. *А.В.Шаповалов*. Принцип узких мест. – М.: МЦНМО, 2008.

Вокруг точки на медиане

Д.ПРОКОПЕНКО, Д.ШВЕЦОВ

В этой статье нас ждет обзорная экскурсия от древнегреческих шедевров геометрии до задач современных олимпиад. Мы постараемся проследить, как непростые задачи наших дней перекликаются с находками древних.

На заочном туре IX Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина была предложена такая задача (автор – Ф.Ивлев).

Задача 1. *Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Перпендикуляр из центра I этой окружности на медиану CM пересекает прямую A_1B_1 в точке K (рис.1). Докажите, что $CK \parallel AB$.*

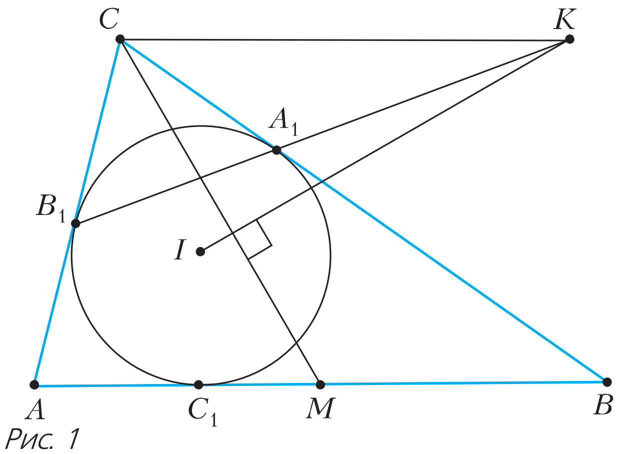

Рис. 1

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200204

Несмотря на простую и интересная формулировку, так сразу и не ясно, как к задаче подступиться. Решение же из книги [1] использует полярное преобразование, методы проективной геометрии, понятие бесконечно удаленной точки – требуется эрудиция. Неужели к задаче с таким элегантным условием нет более простого подхода? Есть! Оказывается, эта задача является вариацией следующего классического факта [2]:

Теорема 1. *Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть прямая C_1I пересекает прямую A_1B_1 в точке P (рис.2). Тогда прямая CP содержит медиану треугольника ABC.*

Давайте сначала с помощью этой теоремы решим задачу 1, а затем докажем и саму теорему.

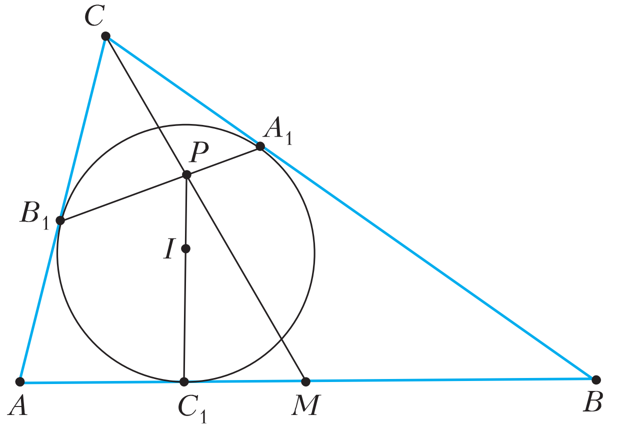

Рис. 2

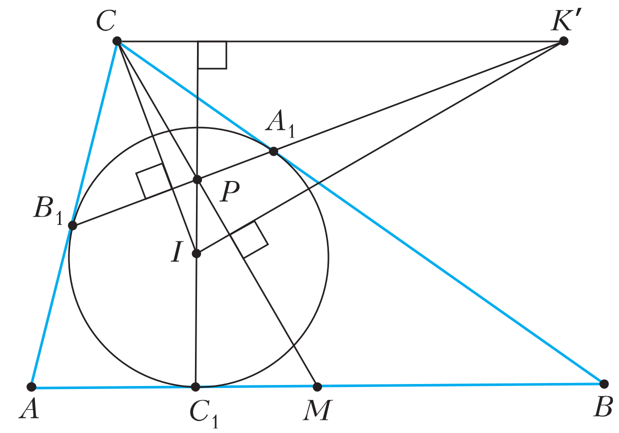

Рис. 3

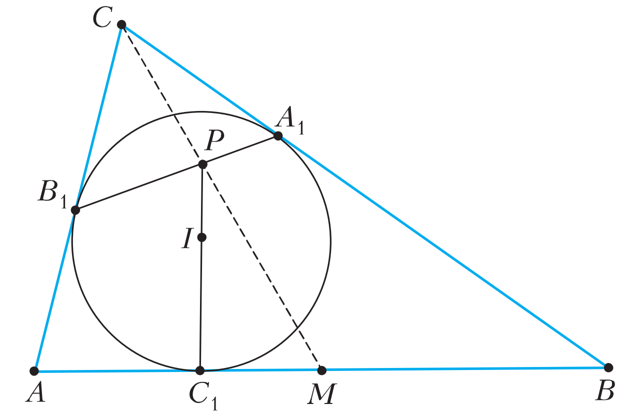

Рис. 4

Решение. Пусть прямая A_1B_1 и прямая, проведенная через вершину C параллельно AB, пересекаются в точке K' (рис.3). Покажем, что точка K' совпадает с точкой K из условия.

Рассмотрим треугольник CIK'. Заметим, что точка P – ортоцентр треугольника CIK'. Следовательно, прямая CP содержит третью высоту. Тогда прямая IK' перпендикулярна отрезку CM, который по основной задаче является медианой треугольника ABC. Прямая IK' удовлетворяет условию задачи, значит, точки K и K' действительно совпадают, что и завершает решение.

Теперь давайте вернемся к теореме 1 и докажем ее.

Доказательство теоремы 1. Итак, у нас имеется точка P – точка пересечения прямых IC_1 и A_1B_1, – которую мы хотим «усадить» на медиану CM (рис.4). Для этого проведем через точку P прямую, параллельную прямой AB. Таким образом мы связываем точку P с точками A_1 и B_1. Итак, пусть прямая, параллельная прямой AB, проходящая через точку P, пересекает стороны AC и BC в точках B' и A' соответственно (рис.5).

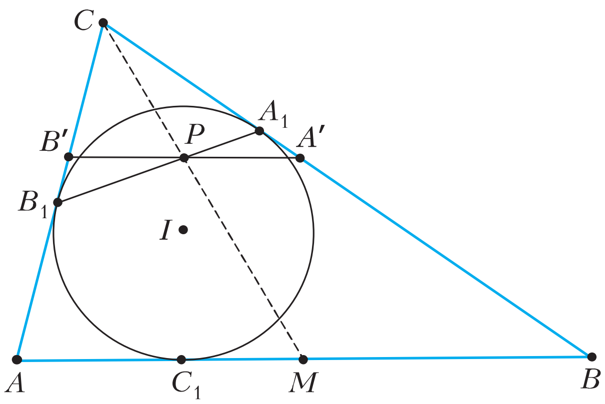

Рис. 5

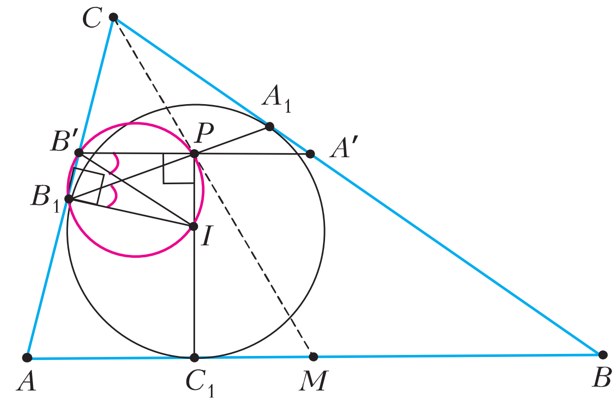

Рис. 6

Теперь заметим, что точки B_1, B', P, I лежат на одной окружности, так как $\angle IB_1B' = \angle B'PI = \angle 90°$ (рис.6). Это дает нам равенство углов IB_1P и $IB'P$, ибо оба угла опираются на дугу PI. Точно такими же рассуждениями можно убедиться, что углы PA_1I и $PA'I$ равны. С другой стороны, мы знаем, что треугольник A_1IB_1 равнобедренный, а стало быть, $\angle IA_1B_1 = \angle IB_1A_1$, но тогда и $\angle IB'A' = \angle IA'B'$. Выходит, мы доказали, что треугольник $A'IB'$ равнобедренный, а отрезок IP в нем высота ($A'B' \parallel AB$), следовательно, $A'P = PB'$. Но раз прямая CP делит отрезок $A'B'$ пополам, то и параллельный ему отрезок AB поделится прямой CP на равные части, что и завершает доказательство теоремы 1.

Оказывается, что такой подход к задаче 1 связывает ее с другой жемчужиной геометрии – *прямой Симсона*.

Теорема 2. *Из точки D опустим перпендикуляры DA_1, DB_1 и DC_1 на прямые BC, CA и AB соответственно* (*рис.7*). *Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой* (*называемой прямой Симсона*) *в том и только том случае, когда точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC.*

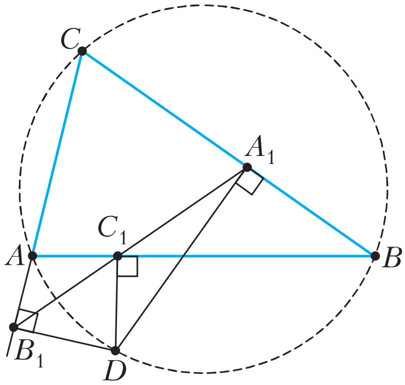

Рис. 7

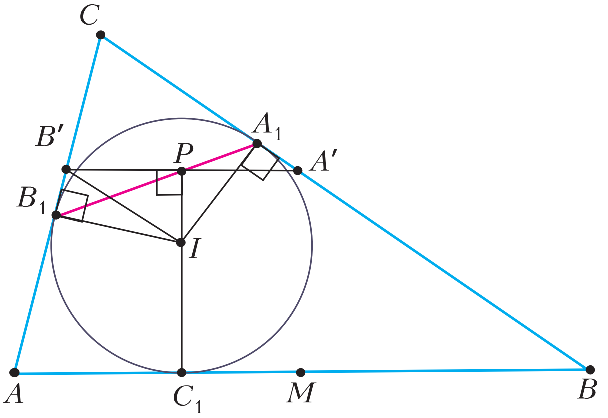

Рис. 8

Доказательство этого утверждения уже несколько раз появлялось на страницах «Кванта», например на первой странице статьи [3]. Тут мы его воспроизводить не будем.

Вооружившись прямой Симсона, вернемся к доказательству теоремы 1. На рисунке 8 мы видим, что точки A_1, B_1 и P – проекции точки I на прямые, содержащие стороны треугольника $A'B'C$. Поскольку точки A_1, B_1 и P лежат на одной прямой, то по теореме 2 точка I лежит на описанной окружности треугольника $A'B'C$. Поскольку CI – биссектриса угла C, а I – середина дуги $A'IB'$, то P – середина $A'B'$ (IP – высота в равнобедренном треугольнике $A'IB'$).

Тем самым, использование прямой Симсона позволяет по-новому взглянуть на решение задачи 1. Отметим, что такая скрытая прямая Симсона в задачах – не такое уж редкое явление.

Немного истории

Здесь мы можем остановиться и немного отдохнуть. Оказывается, у задачи 1 есть своя история. Недавно первому автору этой статьи попал в руки старый номер журнала «Математика в школе» за 1996 год. Выяснилось, что в том же году на Всероссийской олимпиаде в 10 классе была дана наша

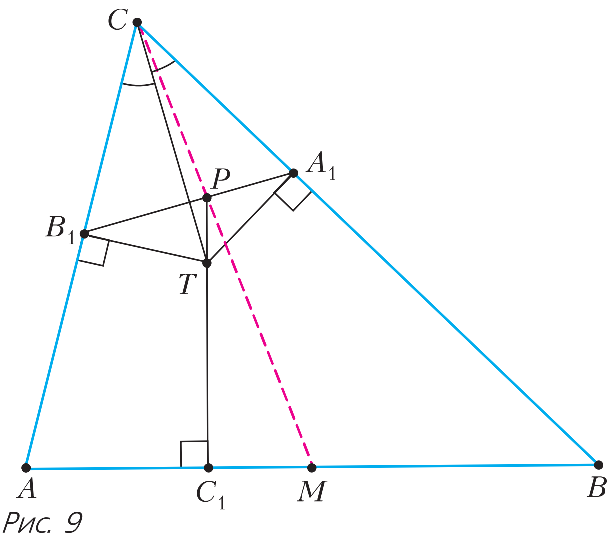

Рис. 9

задача 1 в других обозначениях. В журнале приводились два решения этой задачи. Первое – векторное, чисто вычислительное – занимало примерно половину страницы печатного текста, второе использовало свойства проективного преобразования и двойных отношений. Стало интересно, а есть ли более доступные геометрические решения. Плоды этих размышлений перед вами.

Теперь вернемся из 1996 года более чем на 20 лет назад, в 1973 год. Итак, «Задачник «Кванта», задача М178, автор – Игорь Федорович Шарыгин. Здесь задача 1 дана в более общем виде: вместо центра вписанной окружности можно рассматривать любую точку на биссектрисе! Оказывается, что сама окружность ни при чем. Для удобства формулировку дадим в наших обозначениях.

Задача 2 (обобщение задачи 1). *Из некоторой точки T биссектрисы угла C треугольника ABC опустим перпендикуляры TA_1, TB_1 и TC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть P – точка пересечения прямых TC_1 и A_1B_1* (*рис.9*). *Докажите, что CP делит сторону AB пополам.*

Упражнение. Решите эту задачу.
Указание. Используйте задачу 1.

И наконец, более века назад в фундаментальной книге Д.Ефремова «Новая геометрия треугольника» [1], опубликованной в 1902 году (рис.10), была помещена теорема, совпадающая с задачей И.Ф.Шарыгина с точностью до обозначений. Вообще книгу Д.Ефремова можно рекомендовать всем любителям геометрии. Она содержит богатейший теоретический обзор геометрии треугольника.


НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ
ТРЕУГОЛЬНИКА.

Составилъ
кандидатъ физ.-математическихъ наукъ
преподаватель школы колористовъ
при Иваново-Вознесенскомъ реальномъ училищѣ
Д. Ефремовъ*.

ОДЕССА.
1902.

Дозволено цензурою. Одесса. 9 іюля 1901 г.

Рис. 10

Итак, мы видим, что основная задача только в России была переоткрыта не менее трех раз.

Интересно, что Дмитрий Дмитриевич Ефремов окончил Санкт-Петербургский университет со званием кандидата физико-математических наук, был награжден золотой медалью. В возрасте 28 лет в 1887 году он был назначен учителем математики в Иваново-Вознесенское реальное училище с предоставлением ему уроков черчения, строительного искусства и землемерия в механико- и химико-технических отделениях VII дополнительного класса. Удивительное место для кандидата наук, закончившего университет с золотой медалью. В 1897 году Дмитрий Дмитриевич перемещен штатным преподавателем механики и математики в школу колористов при Иваново-Вознесенском реальном училище (ивановская промышленность в те годы была на подъеме).

На этом закончим историческое отступление и вернемся к задачам.

Задача 1 перекликается с классическим шедевром Архимеда, который уже не раз появлялся на страницах журнала «Квант».

Задача 3 (формула Архимеда, М1000). *Вокруг треугольника ABC описана окружность. Из точки W – середины дуги AB, не содержащей C, опустили перпендикуляр WK на прямую BC (рис.11). Пусть $CA = b$, $CB = a$. Тогда $CK = \frac{a+b}{2}$.*

Знание формулы Архимеда подскажет нам, как решить еще одну непростую задачу.

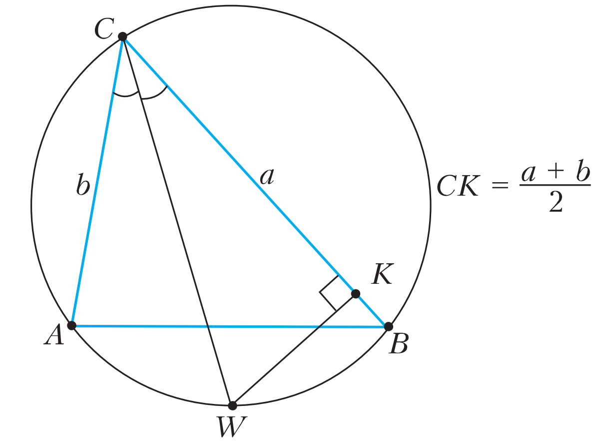

Рис. 11

Задача 4 (Математическое многоборье, СУНЦ МГУ, 2010). *В неравнобедренном треугольнике ABC отметили точку пересечения медиан G и точку пересечения биссектрис I (рис.12). Оказалось, что прямая GI перпендикулярна стороне AB. Докажите, что $AC + BC = 3AB$.*

Из задачи 1 следует, что точка G лежит на пересечении медианы и отрезка, соединяющего точки касания A' и B' вписанной окружности со сторонами CB и CA соответственно.

Проведем через точку G прямую A_1B_1, параллельную AB, где $A_1 \in CA$, $B_1 \in CB$ (см. рис.12). Получим треугольник A_1CB_1, подобный треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{CG}{CM} = \frac{2}{3}$.

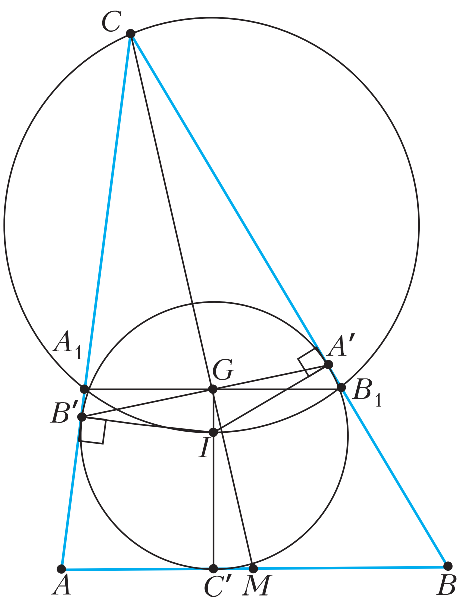

Рис. 12

Мы знаем, что точки C, A_1, I и B_1 лежат на одной окружности. Поскольку CI – биссектриса угла ACB, то I – середина дуги A_1B_1. Имеем

$$CA' = \frac{CB_1 + CA_1}{2} = \frac{\frac{2}{3}CB + \frac{2}{3}CA}{2} = \frac{CB + CA}{3}. \quad (1)$$

В первом равенстве мы воспользовались *формулой Архимеда*, а во втором – подобием треугольников A_1CB_1 и ACB.

Остается воспользоваться тем, что длину касательной из вершины C в любом треугольнике можно найти по формуле

$$CA' = p - AB, \quad (2)$$

где p – полупериметр треугольника ABC. Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим, что $AC + BC = 3AB$.

Треугольники, у которых прямая GI перпендикулярна стороне треугольника, обладают еще одним интересным свойством.

Задача 5 (А.Карлюченко, финал VIII Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). *Пусть G и I – точки пересечения медиан и биссектрис неравнобедренного треугольника ABC, а r – радиус вписанной в него окружности* (рис.13). *Докажите, что $GI = \frac{r}{3}$ тогда и только тогда, когда прямая GI перпендикулярна одной из сторон треугольника.*

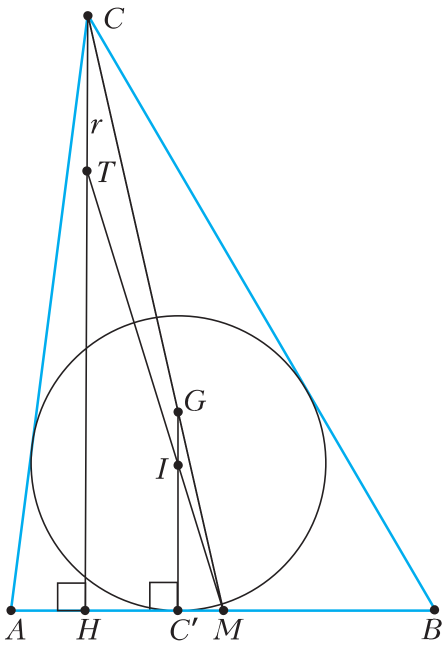

Рис. 13

Классические факты напоминают маяки, на которые можно ориентироваться в бурном олимпиадном море Надеемся, что наша небольшая прогулка с обзором геометрических шедевров, древних и современных, прошла с пользой. Теперь же приглашаем читателя, наряду с задачей А.Карлюченко (тут вам поможет рисунок 13, содержащий подсказки), решить следующую красивую задачу.

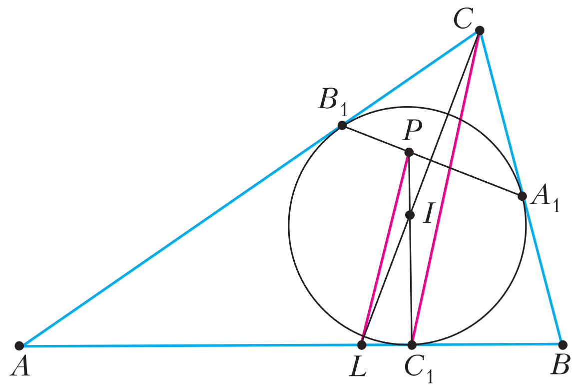

Рис. 14

Задача 6 (Л. Емельянов, С. Берлов, Олимпиада ФМЛ 239, 2005 г.). *Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно* (рис.14). *Обозначим через L основание биссектрисы угла, а через P – точку пересечения прямых C_1I и A_1B_1. Докажите, что $PL \parallel CC_1$.*

Список литературы

1. *Д.Ефремов.* Новая геометрия треугольника. – Одесса, 1902 г. Электронная версия: http://zadachi.mccme.ru/ngt/

2. *А.В.Акопян.* Геометрия в картинках. – М., 2011. Электронная версия: https://users.mccme.ru/akopyan/papers/RuGeoFigures.pdf

3. *Д.Швецов.* От прямой Симсона к теореме Дроз-Фарни. – «Квант», 2009, №6.

4. *А.А.Заславский.* Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина (2010–2014). – М.: МЦМНО, 2015.

5. Задачи на сайте http://zadachi.mccme.ru/

6. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина на сайте geometry.ru