УСТНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ПЛАНИМЕТРИИ В 9 КЛАССЕ

Д.В. Прокопенко, В.В. Ховрина,
школа 2007, (Москва)
e-mail: prokop.dm@mail.ru

D.V. Prokopenko, V.V. Khovrina,
school 2007 (Moscow, Russia)
e-mail: prokop.dm@mail.ru

Ключевые слова: экзамен, геометрия, методика подготовки

Keywords: exam, geometry, method of preparation

Аннотация: в этой статье рассказывается о подготовке к устному экзамену по планиметрии в 9 классе на базе методов из учебника А.В. Погорелова.

Annotation: this article talks about preparing for the oral exam of plane geometry in grade 9 on the basis of methods from the textbook by A.V. Pogorelov.

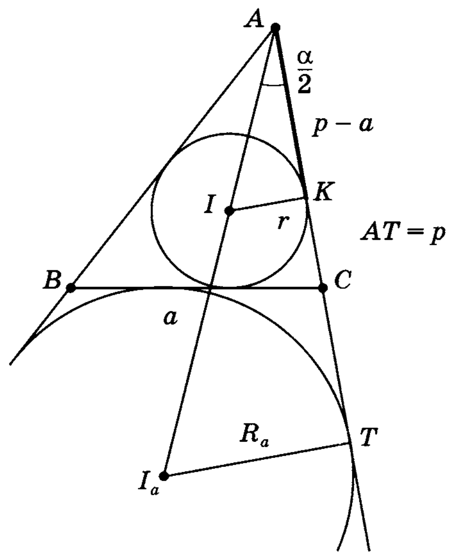
Особое внимание в нашей школе уделяется устному экзамену по геометрии в девятых классах. Подготовка к нему начинается примерно во второй четверти. Каждый ученик получает брошюру специального выпуска серии «Архимед», которая так и называется – «Экзамен по геометрии в 9 классе». Это сборник задач, который является в некотором смысле внутренним стандартом нашей школы при изучении планиметрии и может быть использован в старших классах. Брошюра написана авторами статьи с целью расширения круга задач и методов из учебника А.В. Погорелова. Задачи в ней систематизированы как по тематике так и по методам решения, что позволяет научить школьников некоторым стандартным, с нашей точки зрения, приёмам.

Материал сборника включает в себя четыре раздела: «основные формулы», «векторы и координаты», «различные методы», «билеты».

В первом разделе перечислены основные формулы, необходимые ученикам для успешного решения планиметрических задач.

Используемые здесь обозначения: r, R, R_a – радиусы вписанной, описанной и вневписанной окружностей; H – точка пересечения высот; h_a, l_a, m_a – длины высоты, биссектрисы и медианы, проведённых из вершины A; p – полупериметр.

- Угол между биссектрисами углов B и C: $\varphi = 90° + \frac{A}{2}$.
- Угол между внешними биссектрисами углов B и C: $\varphi = 90° - \frac{A}{2}$.
- Угол между высотами, проведёнными из углов B и C: $\varphi = 180° - A$.
- Отрезки касательных к вписанной и вневписанной окружностям.
  1) $AK = p - a$; 2) $AT = p$.



- Радиус вписанной и вневписанной окружности:

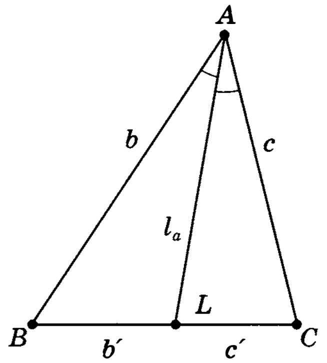
$r=(p-a)\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $R_a=p\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

- Формула параллелограмма: $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$, e и f – длины диагоналей, a и b – длины сторон.
- Формула медианы:

$$a^2+4m_a^2=2(b^2+c^2).$$

- Формулы биссектрисы:

1) $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$; 2) $l_a^2=bc-b'c'$.



- Теорема синусов.
- Теорема косинусов.
- Формулы площади:
  1. параллелограмма;
  2. треугольника:

  1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A$; 2) $S=\frac{1}{2}ah_a$;

  3) $S=pr$; 4) $S=\frac{abc}{4R}$;

  5) Формула Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

  3. трапеции;
  4. четырехугольника $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, где d_1 и d_2 – длины диагоналей, φ – угол между диагоналями;
  5. круга;
  6. сектора;
- Длина дуги.
- Формула расстояния от точки $(x_0;\ y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$

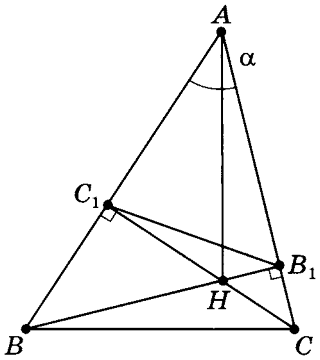
$$h=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- Подобие в треугольнике:

1) $\Delta ABC\overset{k}{\sim}\Delta AB_1C_1$, где коэффициент подобия равен $k = |\cos A|$;

2) $B_1C_1 = BC\,|\cos A|$;

3) $AH = 2R\,|\cos A|$.



Второй раздел содержит разнообразные задания по теме «Векторы и координаты», позволяющие закрепить теоремы и формулы школьного курса аналитической геометрии. Всего примерно 70 задач. Данная тема выделена в отдельный раздел в связи с тем, что многие планиметрические задачи можно решить координатным и векторным методами. И особенно важно, что роль этих методов возрастает в курсе стереометрии.

Сначала предлагается набор заданий, связанных с треугольником.

1. Дано: $A(-1;\ 2)$; $B(3;\ -1)$; $C(1;\ -2)$.

1). Определите вид треугольника ABC.

2). Найдите косинус наибольшего угла треугольника.

3). Составьте уравнение прямых, содержащих стороны треугольника.

4). Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

5). Вычислите координаты точки пересечения окружности и прямой, проходящей через центр окружности и начало координат.

6). Найдите координаты точки пересечения медиан.

7). Составьте уравнение прямой, содержащей медиану, проведённую из вершины A.

8). Составьте уравнение прямой, содержащей высоту, проведённую из вершины A.

9). Найдите площадь треугольника ABC.

10). Составьте уравнение прямой, содержащей биссектрису угла A.

Далее представлены задачи различного уровня сложности. Мы не будем приводить самые простые. Ограничимся только перечислением тем: уравнение прямой, уравнение окружности, окружность и прямая, расстояние между прямыми, расстояние от точки до прямой, формула расстояния между точками, симметрия, вычисление координат вектора, скалярное произведение, коллинеарные векторы. Заметим, что задачи последней темы могут быть сформулированы в виде «Докажите, что три точки (с данными координатами) лежат на одной прямой».

Ниже приведём примеры наиболее интересных задач (номера даны по списку задач брошюры).

Координаты на плоскости

2. **Формула середины отрезка. Уравнение прямой**. Составьте уравнение прямой, отрезок которой, заключённый между прямыми $y = 0$ и $y = x$, делится в точке $M(5; 1)$ пополам.

3. **Формула середины отрезка.** Пусть M и N – середины двух параллельных хорд параболы $y = x^2$. Тогда прямая MN параллельна оси OY.

4. **Расстояние от точки до прямой. Уравнение окружности.** Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(3; 2)$, касающейся прямой $y = 2x + 6$.

5. **Расстояние от точки до окружности.** Найдите расстояние от точки $M(3; -1)$ до окружности

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 11.$$

6. **Формула расстояния между точками.** Каков геометрический смысл следующих выражений:

а) $|x-1| + |x-5|$;

б) $\sqrt{x^2+y^2-6x+8y+25} + \sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}$?

Найдите значения переменных, при которых эти выражения принимают наименьшие значения.

7. **Уравнение окружности.** Докажите с помощью метода координат, что для любой точки окружности, описанной около квадрата, сумма квадратов расстояний до четырёх вершин квадрата есть величина постоянная.

8. **Уравнение окружности.** На плоскости расположены две параболы, которые задаются уравнениями $y = x^2 + px + q$ и $x = y^2 + ry + t$. Пусть они пересекаются в четырёх точках. Доказать, что все эти точки лежат на одной окружности.

22. **Уравнение фигуры.** Какое множество точек задает уравнение:

а) $x^4 + x^2y^2 = 36x^2$;

б) $x^4 + x^2y^2 - 16 = 0$;

в) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 26x^2 - 26y^2 + 25 = 0$;

г) $(x-2y)^2 + (y+2x)^2 = 5$.

23. **Уравнение фигуры.** Составьте уравнение фигуры, состоящей из точек:

– находящихся на расстоянии $\sqrt{2}$ от оси ординат;
– равноудаленных от прямых $x = 5$ и $x = -2$.
– разность квадратов расстояний от которых до точек $A(1; 0)$ и $B(-1; 2)$ равна 1;
– сумма квадратов расстояний от которых до точек $A(-1; 0)$ и $B(1; 0)$ равна 12;

– прямых $x = 5$ и $x = -2$.

27. **ГМТ.** Даны точки A, B и положительное число d. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM^2 + BM^2 = d$.

Векторы

32. **Неравенство треугольника.** Дано: $|\vec{a}+\vec{b}|=7$, $|\vec{a}-\vec{b}|=15$. В каких пределах может изменяться $|\vec{b}|$?

33. **Неравенство треугольника (скалярное произведение).** Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$. В каких пределах может изменяться $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=7\vec{a}-8\vec{b}$?

34. **ГМТ.** Дан вектор $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$. Где расположены все такие точки C, что:

а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|$;

б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BC}|$;

в) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BC}|$.

50. **Векторная формула медианы.** Пусть точка M – середина отрезка AB, O – произвольная точка плоскости. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

51. **Точка пересечения медиан.** Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка плоскости. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

52. **Средняя линия четырёхугольника.** Точки M и N являются серединами отрезков AB и CD соответственно. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$.

53. **Точка, делящая отрезок в данном отношении.** Точка M лежит на отрезке AB и $AM : MB = m : n$. O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

54. **Векторное уравнение прямой.** а) Пусть $\overrightarrow{MC}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$, где точка M не лежит на прямой AB. Точка C лежит на прямой AB. Докажите, что $x + y = 1$. б) Пусть $\overrightarrow{MC}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$ и $x + y = 1$. Докажите, что точка C лежит на прямой AB.

55. **Точка, делящая отрезок в данном отношении.** В треугольнике ABC проведена биссектриса угла A, пересекающая сторону BC в точке A_1; $AB = c$, $AC = b$. Докажите, что: а) векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ коллинеарны; б) $\overrightarrow{AA_1}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

В третий раздел «Различные методы» включены задачи по всем остальным темам программы. Здесь представлены как задачи на вычисление, так и на доказательство.

Первая задача рассчитана на применение стандартных формул для вычисления элементов треугольника. В скобках приведены ответы.

Используемые обозначения: r, R, R_a – радиусы вписанной, описанной и вневписанной окружностей; I, O – центры вписанной и описанной окружности; H – точка пересечения высот AH_1 и BH_2, M – точка пересечения медиан, K – середина BC; h_a, l_a, m_a – длины высоты, биссектрисы и медианы, проведённых из вершины A.

1. **Элементы треугольника**. Пусть в треугольнике ABC известны стороны $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

1). Найти отрезки касательных, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника [6, 7, 8].

2). Определите вид треугольника. Найдите косинусы его углов

$$\left[\cos C=\frac{3}{5},\ \cos B=\frac{5}{13},\ \cos A=\frac{33}{65}\right].$$

3). Найти площадь треугольника [84].

4). Найти h_a, l_a, m_a

$$\left[h_a = 12, l_a = \frac{3\sqrt{65}}{2}, m_a = 2\sqrt{37}\right].$$

5). Найти R, r, R_a

$$\left[R = \frac{65}{8}, r = 4, R_a = 12\right].$$

6). Найти площадь вписанного круга [16π].

7). Найти OI $\left[OI = \frac{\sqrt{65}}{8}\right]$.

8). Найти AH, AI

$$\left[AH = \frac{33}{4}, AI = \sqrt{65}\right].$$

9). Найти OK $\left[\frac{33}{8}\right]$.

10). Найти площадь треугольника CH_1H_2 $\left[\frac{756}{25}\right]$.

11). Доказать, что $MI \parallel BC$.

В пункте 7 надо применить формулу Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (в экзамен не входит). В пункте 10 используется «Подобие в треугольнике» из первого раздела «Основные формулы».

В начале каждой следующей задачи указывается наиболее доступный или рациональный способ решения. Например:

9. **Теорема Фалеса.** Найдите косинус угла A равнобедренного треугольника $ABC\,(AB = AC)$, ортоцентр которого делит пополам высоту, проведённую к основанию.

16. **Формула медианы (или разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций).** Доказать, что для произвольной точки X и прямоугольника $ABCD$ верно равенство

$$XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2.$$

24. **Площадь четырёхугольника. Неравенство.** Стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Докажите, что его площадь не превосходит

1) $\dfrac{(a+c)(b+d)}{4}$; 2) $\dfrac{ac+bd}{2}$.

27. **Трапеция**. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна m, а боковая сторона AD равна n. Найдите основание CD, если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины C, равны между собой.

34. **Подобие в прямоугольном треугольнике.** В треугольнике ABC угол C – прямой. а) На катетах построены равносторонние треугольники площадью S_1 и S_2. Найдите площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе. б) CH – высота. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACH и BCH, равны соответственно r, r_1 и r_2. Выразите r через r_1 и r_2.

48. **Вспомогательная окружность.** На стороне AB квадрата $ABCD$ с центром O построен внешним образом прямоугольный треугольник ABP. $\angle P = 90°$, $AP = 5$, $BP = 6$. Биссектриса угла APB пересекает сторону CD в точке Q. Найдите: а) отношение $CQ : QD$; б) PO; в) PQ.

49. **Вспомогательная окружность.** На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C, если $AB = c$ и $\angle C = 120°$.

50. **Вспомогательная окружность.** а) Треугольник ABC – равносторонний со стороной a. На расстоянии a от вершины A взята точка D. Найдите величину угла BDC.

б) BE и CF – биссектрисы треугольника ABC, в котором $\angle BAC = 60°$. Найдите $\angle BEF$.

51. **Вспомогательная окружность.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A, B и C соответственно равны 60°, 150°

и $45°$. Кроме того, $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD – равносторонний.

53. **Вневписанные окружности.** а) Докажите, что отрезок, соединяющий центры двух вневписанных окружностей треугольника проходит через одну из его вершин.

б) Стороны треугольника равны $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Найдите расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB.

54. **Теорема трилистника.** Пусть точки I и Q – центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC. Вневписанная окружность касается стороны BC. Докажите: а) точки B, C, I и Q лежат на одной окружности; б) центр W этой окружности лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

55. **Биссектрисы пересекаются в одной точке. Вневписанные окружности.** В треугольнике ABC угол A равен $120°$. L_1, L_2 и L_3 – основания биссектрис AL_1, BL_2 и CL_3. Докажите, что угол $L_3L_1L_2$ равен $90°$.

56. **Медианы. Неравенство треугольника. Площадь.** 1) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник. 2) Две медианы треугольника имеют длины 8 см и 10 см. Найдите границы изменения третьей медианы треугольника. 3) Пусть длины медиан треугольника равны 8 см, 10 см и 6 см. Найдите площадь треугольника ABC.

58. **Теорема Чевы.** На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отметили точки F, E и G соответственно. Отрезки AE, BG и CF пересекаются в точке T. Через вершину A провели прямую a, параллельно стороне BC. Прямые EF и EG пересекают прямую a в точках P и Q. Докажите, что $AP = AQ$.

Последний раздел представляет собой перечень теоретических вопросов к 22 экзаменационным билетам.

В течение учебного года учитель периодически включает в домашние работы учащихся задачи из брошюры с последующей обязательной проверкой и обсуждением их решения в классе. Это способствует закреплению и повторению изученного материала и отработке навыков решения задач. По теоретическим вопросам четвёртого раздела систематически проводятся устные зачёты.

Некоторым ребятам, имеющим повышенный интерес к геометрии, предлагается сдать устный экзамен в форме защиты реферата. В декабре-январе они выбирают вместе с руководителем тему и работают над ней до окончания учебного года: изучают литературу, доказывают теоремы и решают задачи. Темы рефератов разные: «Свойства ортоцентра в теоремах и задачах», «Прямая Симсона», «От педального треугольника до точки Тебо», «Барицентрические координаты» и др. В конце года весь подготовленный материал оформляется на 20–30 страницах формата А4. К защите автор готовит презентацию, в которой излагает основную суть проделанной работы, а также рассматривает особо интересные теоремы и задачи, доказанные им самостоятельно.

Сам экзамен проходит в конце мая или начале июня. К нему заранее по каждому билету печатается экзаменационный лист формата А3. Каждый билет состоит из двух теоретических вопросов и двух задач из сборника (одна из них обязательно по теме «Координаты и векторы»). Здесь же предусмотрено место для записей учащихся при подготовке к ответу. Сверху на листах имеется таблица, куда члены комиссии ставят оценки по каждому вопросу. В аудитории ученик может находиться не более двух часов. Пока готовится первая группа ребят, комиссия заслушивает рефераты.

Приведём примеры билетов.

Билет 5

1. Параллельный перенос и его свойства.

2. Теорема Менелая.

3. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$. В каких пределах может изменяться $|\vec{c}|$, если
$$\vec{c}=7\vec{a}-8\vec{b}?$$

4. Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника (последовательно пронумерованных), площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Билет 6

1. Декартова система координат. Основные формулы: формула расстояния между двумя точками, формула середины отрезка, деление отрезка в данном отношении.

2. Формула площади для произвольного четырёхугольника.

3. Даны точки $A(-2; 0)$, $B(1; 6)$, $C(5; 4)$ и $D(2; -2)$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – прямоугольник.

4. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны $30°$ и $60°$. Найдите высоту трапеции.

В процессе подготовки к экзамену ученики должны систематизировать и повторить теоретический материал и прорешать около 140 задач из сборника. Мы надеемся, что это позволит повысить средний уровень учащихся и станет надежным фундаментом для изучения стереометрии в 10 классе.

Мы считаем, что подготовка и проведение устного экзамена по геометрии является необходимым этапом в изучении планиметрии.

Литература

1. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы., М.: МЦНМО, 2006.

2. *Гордин Р.К.* ЕГЭ 2013, Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия, М.: МЦНМО, 2013.

3. *Филипповский Г.Б.* Авторская школьная геометрия, Части 1 и 2, Киев, 2012.

4. *Кушнир И.А.* Альтернативные способы решения задач (Геометрия), Киев, 2006.