углов, и перенос в другую часть, и замена угла $66°$ на смежный с ним ($114°$).

Идея 6. Правильный пятиугольник может помочь намного больше. В частности, он помогает доказать вот такую замечательную формулу:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + 72°) + \sin(\alpha - 72°) = \sin(\alpha + 36°) + \sin(\alpha - 36°).$$

Если в этой формуле перенести один из углов (например, $\alpha - 72°$) в правую часть, а в левую добавить $\sin 0°$, то дальше можно действовать так же, как и везде выше: подобрать α так, чтобы сумма всех углов была равна $180°$.

Упражнения

1. Докажите, что

$$\sin 4°\sin 38°\sin 64° = \sin 10°\sin 18°\sin 46°.$$

2. Докажите, что

$$\sin 3°\sin 39°\sin 75° = \sin 9°\sin 24°\sin 30°.$$

3. Докажите геометрически, что

$$\sin\alpha\sin(30° - \alpha)\sin(60° + \alpha) = \sin\alpha\sin 30°\sin(60° - 2\alpha)$$

при любом α.

Указание. Постройте треугольник и точку внутри него, для которых нужные произведения синусов будут получаться из теоремы Чевы.

4. Докажите геометрически, что

$$\sin 2\alpha\sin(30° - 2\alpha)\sin 30° = \sin 2\alpha\sin(15° - \alpha)\sin(105° - \alpha)$$

при любом α.

5. Докажите, что

$$\sin\alpha\sin(90° - 3\alpha)\sin 30° = \sin 2\alpha\sin(30° - \alpha)\sin(30° + \alpha)$$

при любом α.

6. Докажите, что

$$\sin\alpha\sin(60° - 4\alpha)\sin(60° + \alpha) = \sin 3\alpha\sin(30° - 2\alpha)\sin(30° + \alpha)$$

при любом α.

НАМ ПИШУТ

Еще одно решение задачи М2401

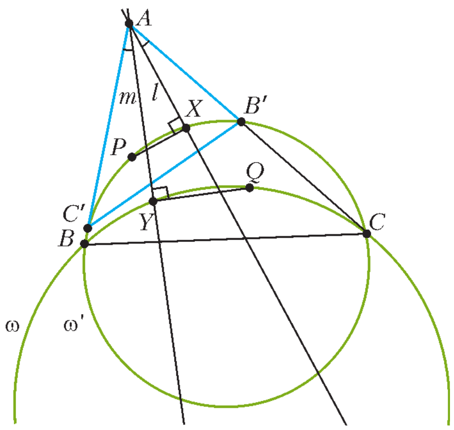
Часто бывает, что другой, новый взгляд на задачу приводит к интересным решениям и обобщениям. Так получилось и с задачей **М2401** (опубликована в «Кванте» №5–6 за 2015 г.).

Точки P и Q, лежащие внутри треугольника ABC, таковы, что $\angle PAB = \angle QAC$, $\angle PBC = \angle QBA$, $\angle PCA = \angle QCB$ (т.е. точки P и Q изогонально сопряжены). Прямые l и m проходят через точку A и симметричны относительно биссектрисы угла A. Пусть X – проекция точки P на прямую l, а Y – проекция точки Q на прямую m. Докажите, что если точки B, C, P, X лежат на одной окружности, то точки B, C, Q, Y тоже лежат на одной окружности.

В задаче речь идет о паре изогонально сопряженных точек P и Q. В статье «Изогонально сопряженные точки» («Квант» №1 за 2016 г.) было указано несколько способов доказательства изогонального сопряжения. Одновременно эти способы могут дать идею, как работать с изогонально сопряженными точками. Для решения задачи М2401 мы используем идею из 7-го способа (изогональное сопряжение «по Богданову»).

Решение. Пусть окружность, проходящая через точки B, C, X, P, пересекает вторично прямые AB и AC в точках C' и B' (см. рисунок). Тогда треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, а точки Q и P – соответственные точки этих подобных треугольников (т.е. при преобразовании подобия, переводящем треугольник ABC в треугольник $AB'C'$, точка Q переходит в точку P).

Действительно, пусть, например, B' и C' лежат на отрезках AB и AC (другие случаи



расположения рассматриваются аналогично). Из вписанного четырехугольника $BCB'C'$ имеем $\angle AB'C' = \angle ABC$, значит, $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$. Далее, из вписанности четырехугольника $BPB'C'$ имеем $\angle C'B'P = \angle C'BP = \angle ABP = \angle CBQ$. Аналогично, $\angle B'C'P = \angle BCQ$, поэтому Q и P – соответственные точки треугольников ABC и $AB'C'$.

Значит, окружность ω, проходящая через точки B, C, Q, и окружность ω', проходящая через точки B', C', P, – соответственные окружности подобных треугольников ABC и $AB'C'$. Прямые m и l – очевидно, соответственные прямые подобных треугольников ABC и $AB'C'$, значит, точки Y и X – соответственные точки этих подобных треугольников. По условию задачи для треугольника $AB'C'$ выполнено условие: окружность ω' проходит через X. Значит, такое же условие выполнено для соответственных элементов треугольника ABC, т.е. окружность ω проходит через Y. Это и требовалось доказать.

В заключение отметим, что задачу М2401 можно обобщить: вместо проекций точек P и Q на прямые l и m на прямых l и m брать произвольные точки X и Y, для которых углы $\angle(l, PX)$ и $\angle(QY, m)$ равны. В таком случае верен тот же факт: если точки B, C, P, X лежат на одной окружности, то точки B, C, Q, Y тоже лежат на одной окружности. Предложенное решение сохраняется и для обобщения.

Д.Прокопенко

О «больших» факториалах

Наш читатель Н.Желваков обнаружил следующее интересное свойство, связанное с делимостью факториалов больших чисел.

Пусть $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$ – множество n различных простых чисел.

Для каждого непустого подмножества $B \subset A$ обозначим через $\Pi(B)$ факториал произведения чисел множества B (например, если $B = \{3, 7, 11\}$, то $\Pi(B) = (3 \cdot 7 \cdot 11)!$).

Для каждого натурального $k \le n$ обозначим через Π_k произведение чисел $\Pi(B)$ по всем подмножествам $B \subset A$, состоящим из k элементов. (Например, если $A = \{2, 3, , 5, 11\}$, то

$\Pi_1 = 2! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 11!$,

$\Pi_2 = (2 \cdot 3)! \cdot (2 \cdot 5)! \cdot (2 \cdot 11)! \cdot (3 \cdot 5)! \cdot (3 \cdot 11)! \cdot (5 \cdot 11)!$,

$\Pi_3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)! \cdot (2 \cdot 3 \cdot 11)! \cdot (2 \cdot 5 \cdot 11)! \cdot (3 \cdot 5 \cdot 11)!$,

$\Pi_4 = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)!$.)

Тогда число $d = \dfrac{\Pi_n \cdot \Pi_{n-2} \cdot \ldots}{\Pi_{n-1} \cdot \Pi_{n-3} \cdot \ldots}$ (в числителе и знаменателе произведение всех Π_i, где i пробегает все числа 1, 2, …, n), является целым, причем оно равно $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} \cdot K$, где K – произведение всех натуральных чисел от 1 до $p_1 p_2 \ldots p_n$, не делящихся ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а $\alpha_i = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1)/(p_i - 1)$.

Доказать это можно, например, так. Воспользуемся *формулой Лежандра* для вычисления показателя степени, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$: $\left[\dfrac{n}{p}\right] + \left[\dfrac{n}{p^2}\right] + \left[\dfrac{n}{p^3}\right] + \ldots$.

Разобьем все подмножества (включая пустое) множества A на пары, отличающиеся одним простым числом $p \in A$. Рассмотрим одну из таких пар подмножеств: $B = \{p, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $C = \{x_1, \ldots, x_m, \ldots\}$. Пусть $x = x_1 x_2 \ldots x_m$. Тогда степень вхождения этого p в выражение $\Pi(B)/\Pi(C)$ равна

$$x + \left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \ldots - \left(\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \ldots\right) = x .$$

Теперь нетрудно вычислить показатель, с которым простые числа из множества A входят в разложение числа d. Скажем, p_n входит в разложение d в степени $(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1)$.

Рассмотрим в произведении $\Pi(A) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p_1 \ldots p_n)$ любой сомножитель G, в разложении которого есть простое число, отличное от $p_1, \ldots, p_n$. Пусть оно не взаимно просто хотя бы с одним из чисел множества $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Представим этот сомножитель в виде $G = q_1 q_2 \ldots q_s H$, где $q_1, \ldots, q_s$ – различные числа из множества A, а H не делится ни на одно из чисел множества A, отличных от $q_1, \ldots, q_s$ (например, для $A = \{2, 3, 5, 11\}$ и сомножителя $G = 140$ кладем $G = 2 \cdot 5 \cdot 14$, т.е. $q_1 = 2$, $q_2 = 5$, $H = 14$. Сомножителю G сопоставим *куст*: сомножители вида $G = q_1 q_2 \ldots q_s H / (q_{i_1} \ldots q_{i_k})$ в произведении $\Pi\left(A \setminus \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\}\right)$). Каждый куст вносит одинаковый вклад (в смысле простых, отличных от $p_1, \ldots, p_n$) в числитель и знаменатель дроби d. Каждый сомножитель входит в один и только один куст. При этом не сокращаются только сомножители в произведении $\Pi(A)$, взаимно простые с числами $p_1, \ldots, p_n$.

Н.Желваков