# Теорема Фалеса в окружности

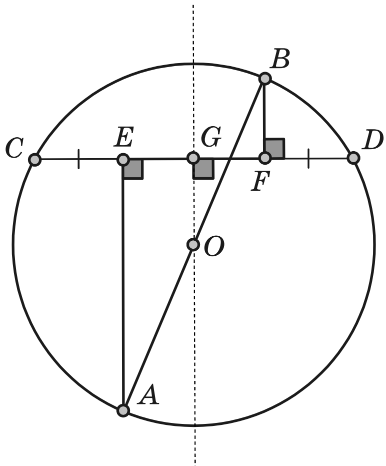
**Д. В. Прокопенко,**
**ФМШ №2007, г. Москва**

Однажды, листая книгу по геометрии, я заметил задачу, которая мне понравилась тем, что в один ход сводилась к классической задаче Архимеда о проекции диаметра на хорду. Через некоторое время на региональном этапе 2007–2008 годов дали задачу, которая напомнила классическую конструкцию Архимеда. Вскоре удалось найти еще несколько подобных задач. Оказалось, что все они являются вариациями одной и той же конструкции и решаются одним и тем же приемом. На мой взгляд, это говорит о том, что классические задачи надо знать. Это интересно и полезно!

Перейдем к задачам кружка. В дальнейшем на чертежах для удобства дополнительные построения будут отмечены пунктиром.

**Задача 1.** В окружности провели диаметр $AB$. Точки $E$ и $F$ — проекции точек $A$ и $B$ на хорду $CD$. Доказать, что отрезки $CE$ и $DF$ равны (*Задача Архимеда*).

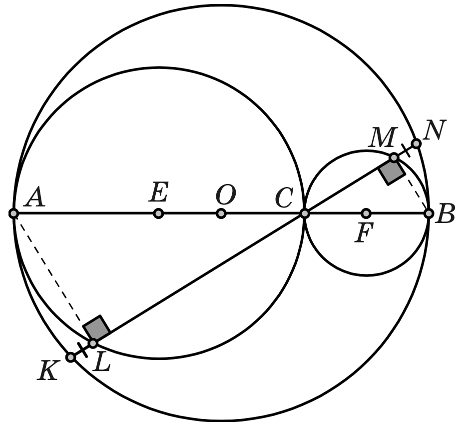
Решение:



Центр окружности точка $O$ — середина диаметра $AB$. Прямые $AE$, $BF$ и $OG$ — параллельны. По теореме Фалеса $G$ — середина $EF$. В равнобедренном треугольнике $COD$ $OG$ — высота и медиана, т.е. $G$ — середина $CD$. Следовательно, отрезки $CE$ и $DF$ равны. Заметим, что если хорда $AB$ и диаметр $CD$ не пересекаются, то решение все равно останется верным. Этот случай лучше сразу не разбирать, поскольку он ведет к решению задачи 6, а для остальных задач этого вполне достаточно.

**Задача 2.** Точка $C$ лежит на отрезке $AB$. На отрезках $AB$, $BC$ и $AC$ как на диаметрах построены окружности. Прямая, проходящая через точку $C$, пересекает большую окружность в точках $K$ и $N$, а меньшие в точках $L$ и $M$. Докажите, что отрезки $KL$ и $MN$ равны.

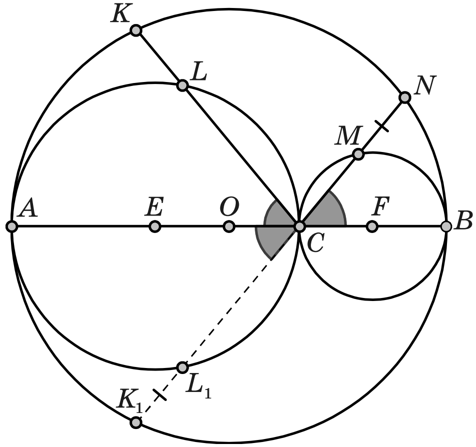
Решение:




Угол, опирающийся на диаметр – прямой, поэтому точки $L$ и $M$ — проекции концов диаметра $AB$ на хорду $KN$. Тогда по задаче Архимеда отрезки $KL$ и $MN$ равны.

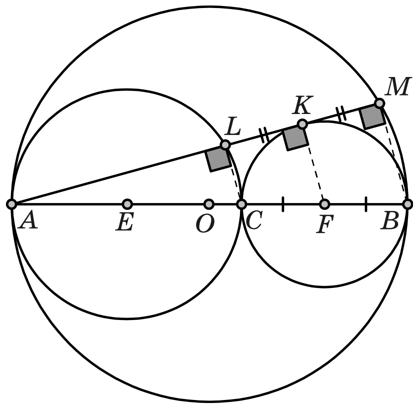
**Задача 3.** На диаметре $AB$ окружности $\omega$ выбрана точка $C$. На отрезках $AC$ и $BC$ как на диаметрах построены окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно. На окружности $\omega$ выбраны точки $K$ и $N$, так что они лежат в одной полуплоскости относительно $AB$, и углы $ACK$ и $BCN$ равны. Отрезки $CK$ и $CN$ пересекают окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ в точках $L$ и $M$ соответственно. Докажите, что отрезки $KL$ и $MN$ равны.

Решение:




Отразим отрезок $KC$ симметрично относительно прямой $AB$. При этом отрезок $KL$ перейдет в $K_1L_1$, концы которого по-прежнему лежат на окружностях. Заметим, что точки $M$, $N$, $K_1$ и $L_1$ лежат на одной прямой. Теперь на чертеже можно узнать задачу 2. Воспользовавшись ее результатом, получим, что $KL = K_1L_1 = MN$, т.е. отрезки $KL$ и $MN$ равны.

**Задача 4.** На диаметре $AB$ окружности $\omega$ выбрана точка $C$. На отрезках $AC$ и $BC$ как на диаметрах построены окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно. Прямая $l$ пересекает окружность $\omega$ в точках $A$ и $M$, окружность $\omega_1$ — в точках $A$ и $L$ и касается окружности $\omega_2$ — в точке $K$. Докажите, что $LK = KM$.



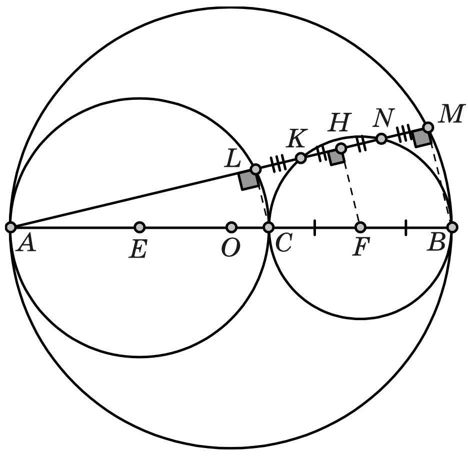

Решение:

Угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому точки $L$ и $M$ — проекции концов отрезка $BC$ на прямую $AM$. Воспользуемся теперь тем, что $AM$ — касательная ко второй окружности. Проведем радиус в точку касания. Получим, что прямые $KF$ и $AM$ перпендикулярны. Тогда по теореме Фалеса отрезки $KL$ и $KM$ равны.

Следующая задача была предложена участникам регионального тура Всероссийской олимпиады по математике в 10 классе в 2007-2008 годах. Автор задачи — П.Кожевников.

**Задача 5.** На диаметре $AB$ окружности $\omega$ выбрана точка $C$. На отрезках $AC$ и $BC$ как на диаметрах построены окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно. Прямая $l$ пересекает окружность $\omega$ в точках $A$ и $M$, окружность $\omega_1$ — в точках $A$ и $L$, а окружность $\omega_2$ — в точках $K$ и $N$. Докажите, что $ME = ND$. ([2], 459)

Решение:



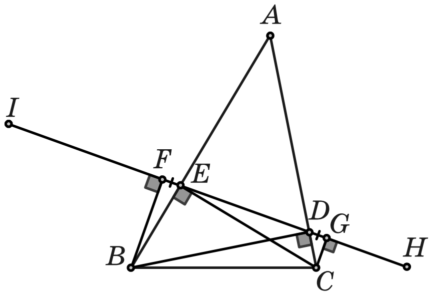

Заметим, что эта задача является обобщением задачи 4, т.к. прямая $AM$ была касательной ко второй окружности, а теперь является секущей. Попробуем воспользоваться методом решения вспомогательной задачи и проведем то же дополнительное построение. Пусть точка $H$ — проекция центра $F$ второй окружности на прямую $AM$. Тогда $H$ — середина $KN$.

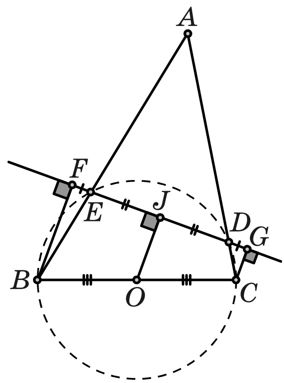
Следующий шаг уже привычный. Угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому точки $L$ и $M$ — проекции точек $C$ и $B$ на хорду $AM$. Тогда по теореме Фалеса отрезки $LH$ и $HM$ равны. Учитывая, что $H$ — середина $KN$, получим, что $LK$ и $NM$ равны.

**Задача 6**. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *BD* и *CE*. Из вершин *B* и *C* на прямую *ED* опущены перпендикуляры *BF* и *CG*. Докажите, что $EF = DG$ ([3], 2.154).

Решение:

Обычно в 8 классе эту задачу решают не очень хорошо. Но стоит нарисовать окружность, проходящую через точки *B*, *C*, *D* и *E* и стереть с чертежа высоты, мы получим хорошо знакомую картину: на отрезке *BC* как на диаметре построена окружность и т.д. (см. рис.) Теперь уже у нас есть необходимый опыт, и решение очевидно. Отрезки *EF* и *DG* равны.




В заключение заметим, что с некоторыми школьниками иногда приходится обсуждать уже первую задачу. После обсуждения конструкции остальные задачи даются уже легче. Обычно на решение 4–6 задач уходит около часа, и никто не остается без решенных задач. Школьники уходят в твердой уверенности, что в этот раз они решали очень простые задачи. «Просто тупили немного... « как они говорят, посмеиваясь друг над другом.

**Список литературы:**

[1] Кушнир И.А. «Триумф школьной геометрии».

[2] Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы, Агаханов Н.Х., и др. М.: Просвещение, 2010.

[3] Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. М.: МЦНМО, 2008.