Теорема об изогоналях

А.КУЛИКОВА, Д.ПРОКОПЕНКО

Прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, мы будем называть изогоналями относительно этого угла. В статье пойдет речь о следующей важной теореме и ее применениях.

Теорема об изогоналях. *Пусть OB и OC – изогонали угла AOD. Прямые AC и BD пересекаются в точке Q, прямые AB и CD – в точке P. Тогда OP и OQ – также изогонали относительно угла AOD.*

На рисунке 1 приведены два из возможных случаев расположения изогоналей OP и OQ относительно угла AOD. Для удобства синим цветом мы будем выделять стороны исходного угла, а красным и зеленым цветом – отрезки, лежащие внутри равных углов (отрезки AB и CD или AC и BD).

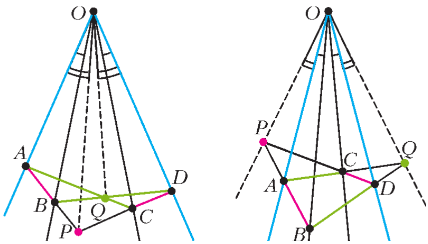

Рис. 1

В конце статьи приведем одну полезную лемму о свойстве и признаке изогоналей и докажем теорему. А сначала покажем, как работает эта теорема.

Перейдем к задачам. Начнем с частного случая, когда изогонали OB и OC совпали.

Эта статья является переработанным вариантом доклада ученицы 11 класса А.Куликовой на Московской математической конференции школьников (ММКШ) в 2016 году. Второй автор статьи был руководителем этой работы.

Биссектриса как совпавшие изогонали

Первая задача эквивалентна задаче М141 из «Задачника «Кванта».

Задача 1. *В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис.2). Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 – высота.*

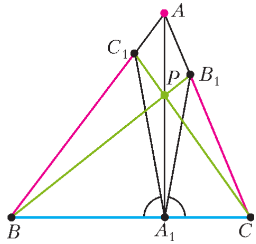

Рис. 2

Решение. Применим теорему об изогоналях к развернутому углу BA_1C и изогоналям A_1C_1 и A_1B_1. Тогда A_1A и A_1P – совпавшие изогонали угла BA_1C, т.е. A_1A – биссектриса угла BA_1C. Следовательно, A_1A – высота треугольника ABC.

Задача 2 (Санкт-Петербургская олимпиада, 2008). *Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Диагонали AC и DB пересекаются в точке E, а прямые, содержащие противолежащие стороны, пересекаются в точке F (рис.3). На прямой EF взяли такую точку*

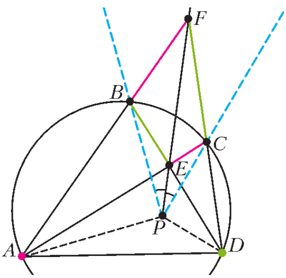

Рис. 3

P, что $\angle BPE = \angle EPC$. Докажите, что $\angle APE = \angle DPE$.

Решение. Заметим, что PE – совпавшие изогонали угла BPC. Точки E и F – точки на этой изогонали. Точки A и D – пересечение прямых FB и CE, FC и BE соответственно. По теореме об изогоналях, PA и PD также являются изогоналями угла BPC. Следовательно, прямые PA и PD симметричны относительно биссектрисы угла BPC. Можно показать, что случай $\angle APE + \angle DPE = 180°$ не реализуется, т.е. $\angle APE = \angle DPE$, что и требовалось доказать.

Интересно, что при решении задачи не использовалось то, что четырехугольник вписанный, значит, утверждение задачи верно для любых выпуклых четырехугольников.

Упражнение 1. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что A_1A – биссектриса угла $C_1A_1B_1$. Докажите, что AA_1 – высота.

Задача 3 (Турнир городов, 2006). *В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на отрезке AA' выбрана точка X (рис.4). Прямая BX пересекает AC в точке B', а прямая CX пересекает AB в точке C'.*

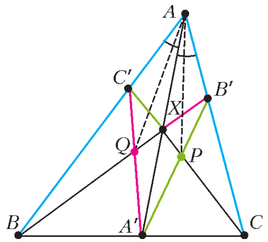

Рис. 4

Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.

Решение. Для решения задачи опять удобно рассматривать биссектрису $A'A$ как две совпавшие изогонали угла BAC. Точки X и A' лежат на изогонали, а C' и B' – на сторонах угла. Точки Q и P – пересечение прямых XB' и $A'C'$, XC' и $A'B'$ соответственно. По теореме об изогоналях, AQ и AP – тоже изогонали угла BAC, т.е. $\angle PAC = \angle QAB$.

Упражнения

2 (Украина, отбор на Международную олимпиаду, 2004). Пусть M – точка на биссектрисе AL треугольника ABC. Через L провели прямую, пересекающую AB в точке P, а продолжение AC за точку C – в точке Q. Пусть N – пересечение BM и PQ, а K – пересечение QM и BC. Докажите, что $\angle NAL = \angle KAL$.

3. На прямой, содержащей биссектрису угла B треугольника ABC, выбраны две точки K и L так, что B лежит между K и L. Прямые CK и AL пересекаются в точке M, прямые AK и CL – в точке N. Докажите, что $\angle MBA = \angle NBC$.

4 (Санкт-Петербург, Олимпиада ФМЛ 239, 2016). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD – в точке Q. На диагонали AC нашлась такая точка T, что треугольники BTP и DTQ соответственно подобны. Докажите, что $BD \parallel PQ$.

Указание. Из подобия треугольников следует, что TB и TD – изогонали угла PTQ. Точки A и C – пересечение прямых PB и QD, BQ и PD соответственно. По теореме об изогоналях, TA и TC – совпавшие изогонали. Следовательно, TC – биссектриса угла PTQ. Осталось заметить, что треугольники ATP и ATQ подобны по двум углам (почему равны углы P и Q?) и имеют общую сторону, поэтому они равны.

Общий случай

Интересно, что в следующих двух задачах используются, на первый взгляд, совершенно разные конструкции. Задача 4 про треугольник, а задача 5 про параллелограмм.

Задача 4. *На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$ (рис.5). Докажите, что точка P пересе-*

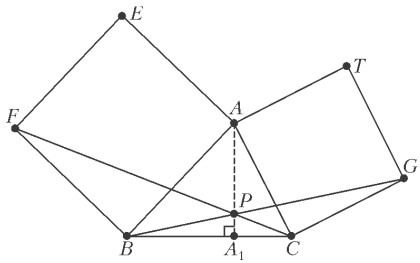

Рис. 5

чения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1.

Задача 5 (А.Полянский, Московская устная олимпиада по геометрии, 2010). *Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры AM на BC и AN на CD, P – точка пересечения BN и DM (рис.6). Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.*

Оказывается, что обе эти задачи являются частным случаем следующей конструкции.

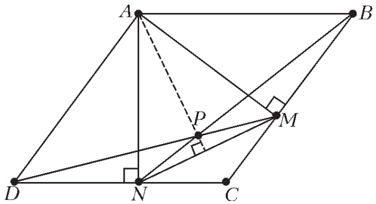

Рис. 6

Задача 6. *На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю (внутреннюю) сторону построены прямоугольные треугольники ABK и ACL с гипотенузами AK и AL, так что* $\angle KAB = \angle LAC$ *(рис.7). Докажите, что прямые KC и LB пересекаются на высоте AH.*

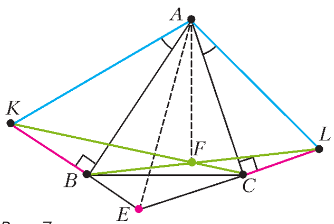

Рис. 7

Решение. Рассмотрим угол KAL; K и L – точки на сторонах угла, B и C – точки на изогоналях. Точки E и F – пересечение прямых KB и CL, KC и BL соответственно. По теореме об изогоналях, AE и AF также являются изогоналями. Заметим, что $\angle ABE = \angle ACE = 90°$ (рис.8), следовательно, AE – диаметр описанной окружности треугольника ABC. Вспомним, что в любом треугольнике высота и диаметр описанной окружности, проведенные из одной вершины, являются изогоналями. Тогда точка F лежит на высоте.

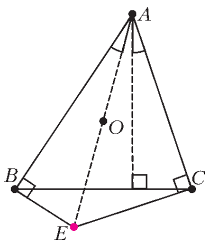

Рис. 8

Упражнения

5. Решите задачи 4 и 5.

6 (М.Тимохин, финал Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, 2016). Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а ее диагонали – в точке Q. Точка M на меньшем основании BC такова, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.

Указание. Заметим, что $\angle AMB = \angle DMC$. Теперь можно применить теорему об изогоналях для развернутого угла BMC, для которого MA и MD – изогонали.

Следующая задача на Московской устной олимпиаде по геометрии в 2014 году в варианте 10–11 классов была самой сложной.

Задача 7 (А.Акопян, П.Кожевников). *Дан выпуклый четырехугольник ABCD (рис.9). Пусть I и J – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а* I_a *и* J_a *– центры вневписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых* IJ_a *и* JI_a *лежит на биссектрисе угла BCD.*

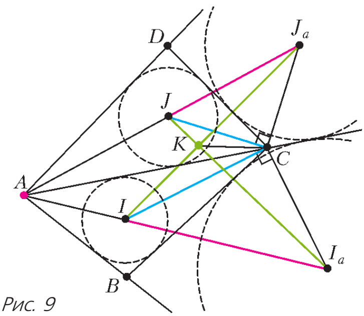

Рис. 9

Решение. Биссектриса треугольника перпендикулярна внешней биссектрисе, следовательно, углы ICI_a и JCJ_a – прямые. Пусть прямые IJ_a и JI_a пересекаются в точке K, прямые I_aI и J_aJ – в точке A. Для угла ICJ лучи CI_a и CJ_a – изогонали, следовательно, по теореме об изогоналях, CK и CA – изогонали угла ICJ.

Пусть $\angle ACD = 2\alpha$ и $\angle ACB = 2\beta$. Тогда $\angle ICK = \angle ACJ = \alpha$. В первом равенстве мы учли, что CA и CK – изогонали угла JCI. Теперь получим

$$\angle BCK = \angle BCI + \angle ICK = \beta + \alpha = \frac{1}{2}\angle BCD.$$

Следовательно, CK – биссектриса угла BCD.

Прежде чем перейти к задаче 8, попробуйте самостоятельно решить такое упражнение.

Упражнение 7 (П.Кожевников). На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC взяты точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K – точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

Задача 8 (В.Ясинский, Олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, заочный тур, 2013). *На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1 (рис.10).*

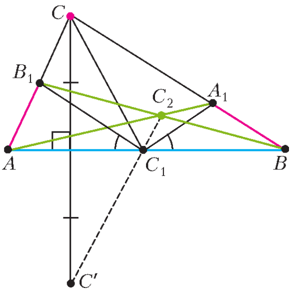

Рис. 10

Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2.

Докажите, что все прямые C_1C_2 проходят через одну фиксированную точку.

Решение. Рассмотрим развернутый угол AC_1B, для которого C_1B_1 и C_1A_1 – изогонали. Точки C и C_2 – пересечение прямых AB_1 и BA_1, AA_1 и BB_1 соответственно. По теореме об изогоналях, C_1C_2 и C_1C – изогонали угла AC_1B. Тогда прямые C_2C_1 и CC_1 симметричны относительно прямой AB. Следовательно, прямая C_2C_1 всегда проходит через точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.

Интересно, что условие

$$\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$$

использовалось не полностью. Мы пользовались только равенством $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$.

Следующая задача взята из книги А.Акопяна «Геометрия в картинках», поэтому и мы дадим ее почти без текста. В решении будет использовано понятие изогонально сопряженных точек. «Квант» уже писал об этом – например, в статье П.Кожевникова «Изогонально сопряженные точки» в №1 за 2016 год.

Задача 9. *Докажите, что AX, BY, CZ пересекаются в одной точке (рис.11,а).*

Решение. Рассмотрим угол BAC, изогонали этого угла AZ и AY. Пусть BY пересекает CZ в точке D (рис.11,б). По теореме об изогоналях AX' и AD – изогонали угла BAC. Заметим, что X и X' – изогонально сопряженные точки. Следовательно, AX' и AX – тоже изогонали. Значит, прямые AX и AD совпали. Прямые AX, BY, CZ проходят через точку D.

Упражнение 8. Докажите, что в условиях задачи 9 (см. рис.11,б) прямые $X'Z'$, XZ, AC пересекаются в одной точке.

Указание. Рассмотрим угол ZAZ'. Из задачи 9 мы знаем, что AX' и AX – изогонали этого угла.

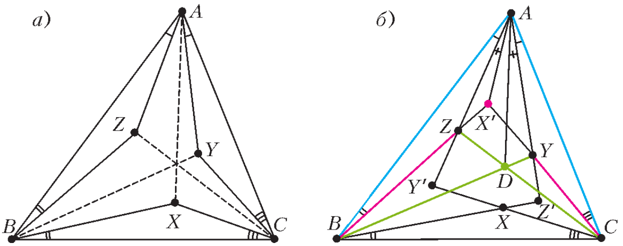

Рис. 11

Прямые $X'Z$ и $Z'X$ пересекаются в точке B. Тогда прямые XZ и $X'Z'$ пересекаются в некоторой точке Q так, что AB и AQ – изогонали угла ZAZ'.

(Продолжение следует)